

骨組構造の最適設計法と
その二輪車体設計への応用に関する研究

松 本 政 秀

平成 5 年 5 月

博 士 論 文

骨組構造の最適設計法と その二輪車体設計への応用に関する研究

金沢大学大学院自然科学研究科
システム科学専攻

松 本 政 秀

目 次

第1章 緒論	1
1-1 研究の背景	1
1-2 論文概要	4
第2章 最適構造設計問題と設計システムOPTSYS	6
2-1 緒言	6
2-2 最適構造設計問題	7
2-3 最適構造設計システム OPTSYS	8
2-4 解析部	10
2-4-1 汎用構造解析コードSAPIV	10
2-4-2 OPTSYSで利用できる要素と解析タイプ	11
2-5 最適化部	12
2-5-1 乗数法	13
2-5-2 内接球法	16
2-5-3 可能方向法	20
2-6 結言	24
第3章 OPTSYSにおける感度解析	26
3-1 緒言	26
3-2 静的変位および質量の感度解析	27
3-2-1 静的変位の感度係数	27
3-2-2 質量の感度係数	36
3-2-3 はりの断面寸法に関する感度係数	37
3-3 固有値の感度解析	39
3-4 固有ベクトルの感度解析	40
3-4-1 Fox等の方法(1)	40
3-4-2 Fox等の方法(2)	42
3-4-3 井上等の方法（拘束点法）	43
3-4-4 各方法の比較	43

3-4-5 異なる方法で正規化された感度ベクトル間の変換法	44	5-2-5 ミニマックス法による振動低減問題の定式化	100
3-5 ゼロ固有値が存在する場合の感度係数の算出法	46	5-3 振動応答レベル最小化設計	103
3-6 周波数応答伝達関数の感度解析	48	5-3-1 設計に用いる構造モデル	103
3-7 加速度応答レベルの感度解析	50	5-3-2 最適化のための具体的手段	106
3-8 結言	52	5-3-3 最適化の結果	107
第4章 静的問題における最適構造設計	53	5-3-4 応答評価点への重み付けの変更による最適化達成度の調節	113
4-1 緒言	53	5-4 結言	117
4-2 二輪車の車体構造および設計に用いる構造モデル	54	第6章 機械構造物の多目的最適設計	118
4-3 質量最小化設計	57	6-1 緒言	118
4-3-1 質量最小化設計の定式化	57	6-2 機械設計における構造設計目標の分類	120
4-3-2 断面寸法のみを設計変数とした設計	58	6-3 プライオリティランキング政策の提案	121
4-3-3 断面寸法と節点座標を同時に設計変数とした設計	62	6-3-1 従来の多目的最適化手法の問題点	121
4-3-4 位相の変更を行なった設計	68	6-3-2 プライオリティランキング政策の実行手順	122
4-3-5 質量最小化設計に関する総括	74	6-3-3 辞書式最適化手法との関連性について	126
4-4 質量最小化設計と静コンプライアンス最小化設計の関係	75	6-4 二輪車車体設計における三目的問題への適用	127
4-5 静コンプライアンス最小化設計	78	6-4-1 車体設計に対する最適化問題の設定	127
4-5-1 静コンプライアンス最小化設計の定式化	78	6-4-2 設計に用いる構造モデル	131
4-5-2 断面寸法のみを設計変数とした設計	78	6-4-3 ねじり静コンプライアンス最小化設計	135
4-5-3 断面寸法と節点座標を同時に設計変数とした設計	81	6-4-4 振動応答レベル最小化設計	139
4-5-4 位相の変更を行なった設計	85	6-4-5 車体質量最小化設計	143
4-5-5 質量最小化と静コンプライアンス最小化の設計解の比較	88	6-4-6 車体設計に適用したプライオリティランキング政策に関する総括	147
4-6 結言	92	6-5 結言	150
第5章 動的問題における最適構造設計	93	第7章 結論	151
5-1 緒言	93	参考文献	154
5-2 二輪車車体振動低減問題の定式化	94	謝辞	158
5-2-1 問題の設定	94		
5-2-2 多目的最適化問題としての定式化	95		
5-2-3 Minkowskiのp乗距離によるベクトル目的関数のスカラー化	97		
5-2-4 Tchebychev ノルムによるスカラー化の効用	99		

第1章 緒 論

1-1 研究の背景

近年、有限要素法を中心とした構造解析手法が自動二輪車の設計にも盛んに適用されるようになり、製品の高品質化やトータルでの設計コストの低減に大きく貢献してきた⁽¹⁾。自動二輪車（以下、二輪車）の操縦は、人間が直接その身体を使って制御する比重が他の交通機械に較べて非常に高いため、構造そのものは比較的単純ながら、その設計には一切の無駄を排した厳しさが要求される。したがって、数値的な構造解析手法の導入によってそれまでよりはるかにクリティカルな設計を行なうことがそのまま、より操縦者と一体感のある安全な製品作りに結びつくと言うことができる。その中で、二輪車の車体設計においては、ねじりや曲げ力に対する静剛性、強度、あるいはまたエンジンの実稼働状態での振動特性等の予測・改善を目的として、高精度な構造モデル化の確立がなされてきた。

しかし、設計の図面段階で実機の諸特性が予測できるようになると、次には必然的に「要求される諸性能を満足した上での、最良の諸元の効率的決定法」すなわち最適設計法が求められるようになった。これはすなわち、上述のような理由によって限界的な設計が必要なこと、さらにそのような設計を自動車の設計などに較べてもはるかに短時間のうちに行なうことが要求されるためである。

歴史的には、1960年、構造設計問題そのものを明確に定式化した上で、与えられた設計条件を満足しつつ、設計の目標を最大限に達成するような構造物の寸法その他の諸元をコンピュータ支援によって決定しようとする設計の方法論として、有限要素法などの構造解析手法と数理計画法を結びつけた最適構造設計の可能性が Schmit らによって既に指摘されていた⁽²⁾。最適設計に関する研究は、その後'70年代にかけて様々な数理計画手法の研究・開発を中心に遂行された^{(4),(5)}。しかし、主にコンピュータの計算能力が障害となり、実際設計への適用が行なわれるようになるためには'70年代後半を待たねばならなかった^{(6)~(8)}。この時期、米国ではいくつかの数理計画手法を集めたプログラムパッケージの開発が盛んに行なわれた^{(9),(10)}が、それらはいずれも最適構造設計への適用を強く意識したものであった。以後、コンピュータの高速化、設計現場への構造解析手法の浸透、より高品位の設計への志向などの背景もあって最適設計研究は活発化し、一般の技術者の間でも関心が高まった。日本国内でも、機械学会、土木学会、自動車技術会

などで講演会や分科会が多く参加者を集めて開かれるようになっている⁽¹¹⁾。

現在までに行なわれた最適構造設計の研究では、骨組構造の断面形状および幾何形状、シェル構造物の板厚、連続体構造物の境界形状および形態などを対象として、様々の試みがなされてきた。このうち骨組構造については、部材が軸力のみを受け、応力状態の比較的単純なトラス構造への適用は数多くなされてきている⁽¹²⁾。しかし、二輪車の車体のような、部材が軸力とともに曲げも受ける三次元フレーム構造を対象とした最適設計の研究は、これまであまり行なわれていない。二輪車の車体構造に関しては、近年ではシェル構造とみなした方が適切であると思われる構造を持つ機種も現われているが、フレーム構造は製造コストの低さや設計経験の豊富さの点で、将来にわたっても二輪車の車体構造の主流であり続けると予想される。またフレーム構造は、二輪車以外にもバス、トラックなどの主要交通機械の車体として用いられていることで、実用機械構造物の形態として重要な位置を占めている。自動車においても、近年は車体外板の樹脂化にともなって、従来のモノコック構造をフレームで代替しようという試みがなされている⁽¹³⁾。さらに、尾田⁽¹⁴⁾、菊地⁽¹⁵⁾、大河内⁽¹⁶⁾らによる連続体の形態決定の研究では、アプローチの手段こそ異なるものの、一様に次のような興味深い結果が得られている。それは、単連結の初期形態から出発して最適構造を探索していくと、結果的に多連結形態が得られるが、それらの形態からわれわれは容易にフレーム構造を創造できるということである。そのようにして創出されたフレーム構造は、改めてその幾何形状や部材断面寸法を決定する必要がある。そしてこのことは、構造物の形態決定問題が、多くの場合最終的にわれわれをフレーム構造の形状決定問題へと導くことを示唆している。

以上のように、フレーム構造物は将来的にも、構造物の優れたあり方の一つとしてその重要性が失われることはないと考えられる。しかし、上でも述べたように、フレーム構造物を対象とした最適設計の研究は、これまで多くは行なわれていない。特に、複雑な三次元構造物の忠実なモデルを対象としたものや、部材断面の寸法だけでなく、幾何形状もまた設計諸元とした最適設計はあまり例がない。また、機械構造物の場合は、静的な挙動のみならず、実稼動時の動的挙動もまた同様に重要な設計要因となるにもかかわらず、実際の構造物に対して最適設計の考え方が適用された例は少数しかない^{(17),(18)}。これらは、主として以下の理由によると考えられる。

まず第一に、最適設計法を適用する際に必要となる膨大な計算量の問題が挙げられる。先に述べたように、近年では複雑な幾何形状をもつ構造物の構造応答評価には、有限要

素法などの数値的構造解析手法が日常的に用いられている。その結果、構造モデルの実機に対する近似度が高ければ高いほど、その評価、すなわち構造解析自体が多くの計算量を必要とするようになった。第2章で述べるように、設計という作業は何回もの解析の繰り返しを伴うため、それに必要となる全体の計算量は膨大なものとなりがちである。特に、設計の評価要因の中に動的な構造応答が含まれている場合には、コンピュータの計算能力が飛躍的に向上した現在にあってもなお、具体性のある構造物の最適設計は非常に大きな計算量を要求することになる。したがって、最適構造設計システムの構築にあたっては、現実的な時間内に解の得られる高速な方法の開発が必要となる。

第二に、現実の設計では評価すべき要因が数多くあり、設計者はそれらすべてをバランスよく満足する妥協解を見いださなければならないという要求から生じる困難が挙げられる。最適構造設計は、上述のように数理計画手法と構造解析手法の統合によって、システムとしては動作可能となる。しかし、その適用に際しては、設計者の意向が十分に反映されるような配慮がなされる必要がある。そして、その意向が反映されたか否かは、最適構造設計システムによっては教示されない。その判断は通常、極めて要素技術的な視点から、設計者自身の知見によって行なわれる。したがって、最適構造設計のための良い方策を確立するためには、自動的な設計システムの構築だけでなく、設計者の意向をいかに合理的に反映するかという方法論を見いださなければならない。従来、最適設計法に関する議論では、ともすれば最適解探索の効率や安定性、理論的に厳密な解への収束性といった応用数学的側面が強調されがちであった。しかし、現実的な設計作業に付随する上述のような課題については、これまでほとんど議論がなされてこなかった。

以上のように、従来の研究では解決されていない諸問題が、最適構造設計手法が現実の設計現場へ浸透することを阻んでいることは事実である。本研究では、これらの諸問題の存在を踏まえた上で、まず、独自の最適構造設計プログラムシステムを開発する。このシステムは、二輪車のフレーム設計を念頭におきつつ、一般の骨組構造の設計に適用可能であることを開発の目標とする。システムの構築にあたっては、取り扱うことのできる問題の規模や、計算時間などの面で、実際の設計に耐えうる機能をもつよう十分な配慮をする。次にこのシステムを用いて、静的および動的の設計要因をもつ二輪車フレームの設計諸元の決定を試みる。さらに、実際に行なわれている設計の過程に洞察を加え、最適設計問題として取り扱う際の問題点を抽出する。そして最後に、その問題を

解決するための新しい方策を提案し、具体例への適用によってその有効性を確認する。

1-2 論文概要

本論文は、第1章～第7章で構成される。第2章では、まず、取り扱う最適設計問題の説明を行ない、次にこれを解くために本研究で開発した最適構造設計システムの概要を述べる。これは、二輪車の車体を念頭においたフレーム構造のための最適設計プログラムシステムである。そこではまずシステムの構成を示し、続いて主要な構成要素である「解析部」と「最適化部」についての説明を行なう。

第3章では、フレーム部材の断面寸法および部材配置を設計変数とした静的および動的な感度解析について説明する。静的感度解析においては静的変位と構造質量について、また動的感度解析においては固有値問題における固有値と固有ベクトル、および周波数応答伝達関数についての感度算出法を述べる。

第4章では、フレーム構造の静コンプライアンスと質量に着目した最適設計について述べる。そこでは実際問題への適用例として、二輪車フレームのねじり静コンプライアンスを所期の値に維持しつつ、質量を最小化する設計を試みる。またこれとは逆に、質量を所期の値に維持しつつ、ねじり静コンプライアンスを最小化する設計も行なう。そして、この静コンプライアンス最小化設計が、先の質量最小化設計とほぼ同じ最適構造諸元を与えることを示す。

第5章では、静コンプライアンスと質量という静的な設計項目に加えて、フレーム構造が外部からの強制加振を受ける場合に生じる、構造各部の振動レベルも同時に考慮した動的な最適設計について述べる。ここでは最初に、現実の機械構造が達成しなければならない、非常に多数の加振力成分に対する多数の評価点での同時的な振動低減に関して、ミニマックス法の定式化を用いた最適設計法を提案する。そして、実際の二輪車フレーム構造を例にとり、静コンプライアンスと質量を制約条件とした振動応答レベルの最大値の最小化設計を行なう。

第6章では、一般の機械構造設計を、複数の設計目標をもつ多目的最適化問題としてとらえたアプローチについて述べる。まず最初に、一般の機械の設計目標を、その属性に基づいて要求目標と希求目標とに分類し、それらの間に存在する優先順位について考察する。そして次に、それらの優先順位を反映できる多目的最適化手法として、 ϵ -制約式法に基礎をおいたプライオリティランキング政策を提案する。さらに、二輪車のフ

レーム構造を例として、そのねじり静コンプライアンスの減少、質量の軽減および振動応答レベルの低減という三つの設計目標を考慮した多目的最適設計問題への適用を行なう。そして、この方法によって設計者の選好を反映してそれぞれの設計目標を達成できることを示す。

最後に第7章では、以上の各章の総括を行なう。

第2章 最適構造設計問題と設計システムOPTSYS

2-1 緒言

一般に、数理手法を援用した構造物の設計作業には、図2-1に示すように全く逆方向の二つの過程が存在する。一つは、設計者が何らかの知見に基づいて決定した構造諸元から、構造応答を算定する過程である。この過程は構造の「解析」と呼ばれる。一般に構造解析問題の解は、構造寸法や材料物性などの構造諸元が決まれば一意的に求めることができる。これに対し、設計者が設計しようとする構造物の剛性や強度に関して、あらかじめ設定された設計目標や設計制約を満足する構造諸元を見いだそうとする過程は「シンセシス」と呼ばれる。構造のシンセシスの過程は、構造解析が順問題の形式をなすのに対して、いわゆる逆問題の形をとる。

シンセシス問題の最大の特徴であり、またその解を求めることを本質的に困難にしているのは、一般に設計者が設計を行なおうとする際に設定する設計制約だけでは、構造諸元を一意的に定めることができないという点である。これは、与えられた制約を満たす設計解が、通常は無数に存在することに由来する。その多数の設計解候補の中からただ一つを選んで現実の構造諸元とするためには、「何をもって他の設計解候補よりも優れた解であるとするか」の基準が必要となる。従来より、最小重量設計、最大剛性設計、逆変分原理に基づく最適設計⁽²¹⁾など、種々の基準によるアプローチが試みられてきた。しかし、その基準の設定にあたっては、個々の問題に関する要素技術的な知見や、設定した問題を安定して解くための応用数学的な視点からの検討が必要であると考えられる。

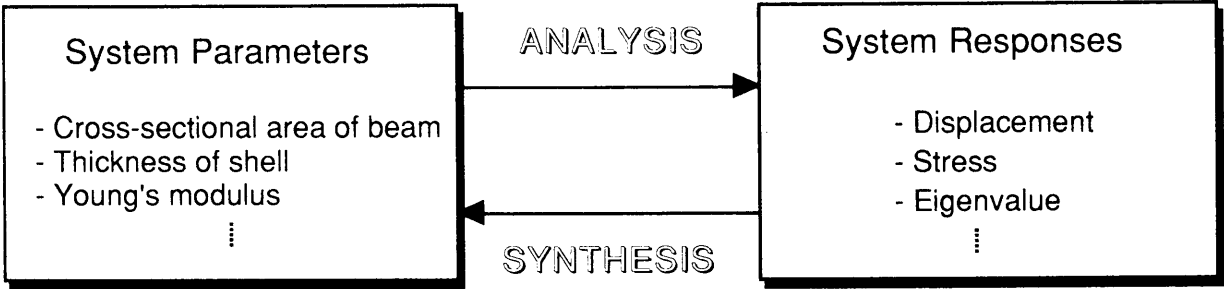


図2-1 構造物の設計過程における Analysis と Synthesis

第1章でも述べたように、以上のようなシンセシス問題の解決に対し、本研究では数理計画法に基づいた設計方法論の構築とその応用をめざす。そのために、本章ではまず、本論文で取り扱う最適構造設計問題の形式を明らかにする。そして、その問題を解くために開発した最適構造設計プログラムシステムOPTSYS(structural OPTimization programming SYstem)の構成と動作の概念について述べる。さらに、OPTSYSはいくつかのサブシステムからなるが、それらの中核となる解析部(Analyzer)と最適化部(Optimizer)についての説明を行なう。

2-2 最適構造設計問題

数理計画法の定式化に基づく最適設計問題とは、以下の形式をとる問題をいう。

$$\left. \begin{array}{l} \text{目的関数: } f(\mathbf{x}) \rightarrow \min \\ \text{制約関数: } g_j \leq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m) \\ \quad \quad \quad x_i^L \leq x_i \leq x_i^U \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ \text{設計変数: } \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array} \right\} \quad (2-1)$$

ここで \mathbf{x} は設計変数ベクトルと呼ばれ、構造設計問題では、構造特性を改善したり、設計制約を満足させたりする際に変更される寸法などの諸元がこれにあたる。また、 $f(\mathbf{x})$ は目的関数、 $g_j(\mathbf{x})$ は制約関数と呼ばれる。いずれも設計変数に対しては一般に非線形となる場合が多い。さらに、設計変数のとりうる上限値および下限値を定める制約は、非線形制約 $g_j(\mathbf{x})$ とは区別して、側面制約と呼ばれる。なお、式(2-1)は目的関数の最小化問題を表わしているが、最大化問題の場合でも目的関数の符号を逆にすることにより最小化問題に変換することができる。これ以後、特に断わらないかぎりには目的関数の最小化問題を想定する。式(2-1)で表わされる最適化問題を、二つの設計変数 x_1 と x_2 に関して、二つの制約条件 $g_1(\mathbf{x})$ と $g_2(\mathbf{x})$ をもつ目的関数 $f(\mathbf{x})$ の最小化問題として概念的に図2-2に示す。

さて、式(2-1)では目的関数がただ一つであり、この定式化によって設定された問題を特に単一目的最適化問題と呼ぶこともある。より一般的には、最小化あるいは最大化すべき目的関数がベクトルで表現される、いわゆる多目的最適化問題としての定式化が必要となることがある。これに関しては、第6章で言及する。

2-3 最適構造設計システムOPTSYS

OPTSYSは、Fortranで記述された骨組構造用の最適設計プログラムシステムである。2-1節でも述べたように、最適構造設計において要求される問題設定は、必ずしも一通りではない。しかるに、公開されているほとんどの最適構造設計システムでは、構造物の重量あるいは体積が目的関数として固定されてしまっている。実際の構造設計の場に最適化の概念を導入するためには、様々な型を持つ設計要求に柔軟に対応できる最適構造設計システムが必要である。

このため、OPTSYSでは目的関数、制約関数としていくつかの構造応答を選択することができるよう配慮した。第6章では、実用機械構造物の設計においては、複数の設計目標を目的関数とする多目的最適化問題のアプローチが必要となることが主張され、そのための新たな手順が示される。このアプローチでは、問題解決の過程は最終的には相異なる目的関数を持つ一連の単目的最適化問題を解く副過程に帰着されるため、OPTSYSがもつ上記の機能が発揮される。

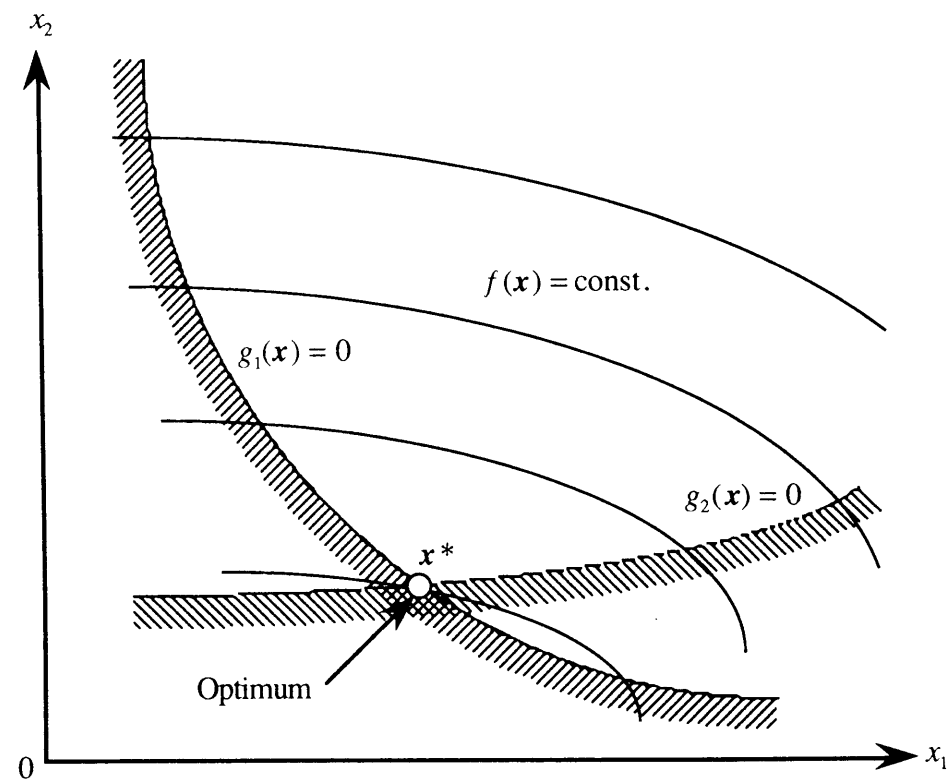


図2-2 非線形最適化問題の設計空間と最適値

OPTSYSによる最適化の流れを概略的に図2-3に示す。OPTSYSでは最初に、メインプログラムによって最適化をコントロールするデータが読み込まれる。設計変数の初期値や側面制約値、あるいは非線形制約関数の上限値などもここで入力される。次に、これらのパラメータはいったん最適化部を通してから解析部へ渡される。解析部では、その初期パラメータに加えて新たに読み込んだ構造モデルのデータに基づいて第一回目の構造解析を実行し、必要な構造応答を算出する。また、これと同時に解析部では、それぞれの設計変数の変動に対する構造応答の変動の大きさを評価するために、感度解析が実行される。そして、計算された構造応答値およびその感度係数は、最適化部に戻される。

最適化部は、それらの値をもとに、目的関数や制約関数の値、およびそれらの感度の値を計算する。そして、所期の制約条件を満足しつつ、最も効果的に目的関数を減少（最大化の場合は増加）させるような設計変数の値の組を見いだす。それらの設計変数の組は再び解析部へ転送され、そのデータに基づいた構造解析と感度解析が実行される。このようにして、最適化部と解析部で構成される繰り返し処理が、最適化の収束条件が満足されるまで継続される。そして最後に、プログラムは結果を出力して終了する。

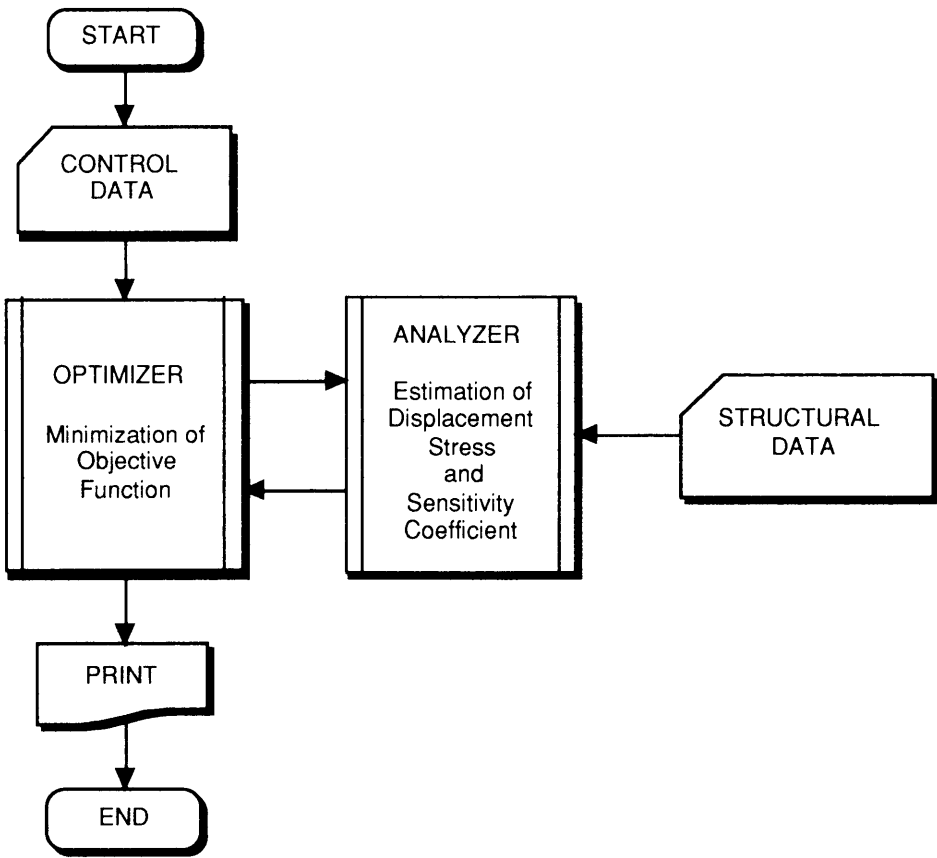


図2-3 最適構造設計プログラムOPTSYSにおける処理の流れ

OPTSYSの入力データは、上で述べたように、最適化コントロールデータと構造モデルデータの二つに分けられる。さらに構造モデルデータとして、静解析および動解析に対応するものをそれぞれブロックずつ用意することができる。OPTSYSの入力データ構造を図2-4に示す。先頭に最適化コントロールデータがあり、それに続いて静解析用の構造データブロック、動解析用の構造データブロックが配置される。

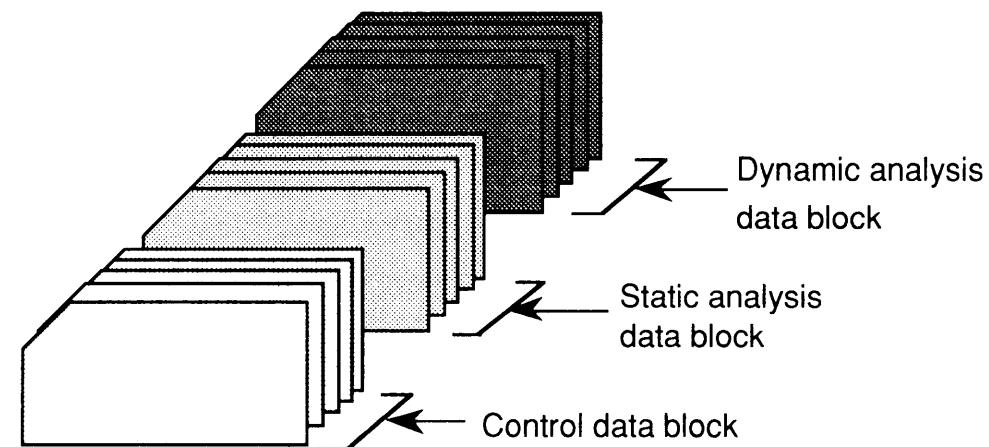


図2-4 OPTSYSのデータ構造

2-4 解析部

OPTSYSの解析部は、その基礎を汎用構造解析コードSAPIVに置いている。本節では、まず簡単にSAPIVの紹介を行い、それからOPTSYS解析部の機能について述べる。

2-4-1 汎用構造解析コードSAPIV

SAPIVは、Structural Analysis Program for static and dynamic response of linear systems IVの略称である。これは、カリフォルニア大学のE.L.Wilson教授らによって開発され、1973年にリリースされた、有限要素法を用いた構造解析コードである⁽²⁾。三次元構造物に対する線形の静的ならびに動的の解析を、中規模のコンピュータでも効率よく実行できることが開発のねらいとなっている。以下に、(1)使用できる要素ライブラリ、および(2)実行できる解析タイプとそれぞれにおける平衡方程式の解法を示す。

(1)要素ライブラリ

- ①三次元トラス要素
- ②三次元はり要素

- ③平面応力要素および二次元要素
- ④三次元ソリッド要素
- ⑤三次元厚肉シェル要素
- ⑥平板および薄肉シェル要素
- ⑦境界要素（node to ground のばね要素）
- ⑧三次元管要素

(2)解析タイプと平衡方程式の解法

- ①静解析・・・ガウスの消去法（コレスキー法）
- ②実固有値解析・・・小規模問題にはデターミナントサーチ法、中規模以上の問題にはサブスペース法
- ③時刻歴応答解析・・・運動方程式の直接積分、あるいは実固有値解析をベースとしたモード法
- ④応答スペクトル解析・・・実固有値解析をベースとしたモード法

2-4-2 OPTSYSで使用できる要素と解析タイプ

上述のように、SAPIVでは多くの有限要素と解析タイプが利用可能である。しかし、OPTSYSは基本構造が骨組をなす構造を最適設計の対象とするため、使用できる要素の種類を以下のように限定した。

- ①三次元トラス要素
- ②三次元はり要素
- ③平板および薄肉シェル要素
- ④境界要素（node to ground のばね要素）
- ⑤ばね要素（node to node のばね要素）

ここで、⑤のnode to node のばね要素は、オリジナルのSAPIVには無いものである。これは、実用機械構造物の取り扱いにおいて有用性が高いと考えられたため、OPTSYS構築の際に新たに作成した要素である。この要素により、節点と節点をそれぞれ独立な6自由度の剛性をもつばねで結ぶことが可能になる。

また、解析タイプについては、SAPIVの時刻歴応答解析および応答スペクトル解析を外し、かわりにモード法による周波数応答解析を実行できるようにした。したがって、OPTSYSのもつ解析タイプは以下の通りである。

- ①静解析 ・・・ガウスの消去法（コレスキー法）
 - ②実固有値解析 ・・・小規模問題にはデターミナントサーチ法、中規模以上の問題にはサブスペース法
 - ③周波数応答解析 ・・・実固有値解析をベースとしたモード法
- さらに OPTSYS では、上の三つの解析タイプのすべてについて、設計変数に対する感度解析が実行できる。感度を算出できるのは、次の二項目についてである。
- ・三次元はり要素の断面特性（断面積、断面二次モーメント、ねじり係数）
 - ・三次元はり要素を構成し、かつ他のタイプの要素を構成しない節点の座標値
- 静解析、実固有値解析および周波数応答解析での感度解析法については、第 3 章で詳述する。

2-5 最適化部

2-3節で述べたように、OPTSYSでは設計要求に合わせた最適化問題の設定に応えられるように目的関数と制約関数の組み合わせを選択することができる。表2-1に選択可能な三つの組み合わせを示す。

表2-1 OPTSYS で選択できる目的関数と制約関数の組み合わせ

組み合わせ	①	②	③
目的関数	質量	静的変位	振動応答レベル
制約関数	静的変位	振動応答レベル	質量
	振動応答レベル	質量	静的変位
	固有振動数	固有振動数	固有振動数

表2-1に示した組み合わせのそれぞれの目的関数はすべて、最小化される構造応答である。また、固有振動数を最小化あるいは最大化するという設計は、定式化としては可能であるが、実際の設計においては制約条件として考慮できれば十分であると判断されたため、OPTSYSでは目的関数としては取り扱わないこととした。

次に、表2-1に示したような形式の最適構造設計問題を解くためにOPTSYSで採用した

数理最適化手法について述べる。式(2-1)で表わされる最適化問題の数値解を求める手法は数多く提案されている。目的関数 $f(\mathbf{x})$ 、制約関数 $g_j(\mathbf{x})$ の両方が設計変数 \mathbf{x} について線形であるような問題は線形計画問題と呼ばれ、通常はシンプレックス法を用いて安定に解くことができる。しかし、目的関数 $f(\mathbf{x})$ 、制約関数 $g_j(\mathbf{x})$ のいずれかが非線形の場合、この問題の解を求める手順は格段に複雑となる。現在まで、この非線形最適化問題を解く決定的なアルゴリズムは見つかっていない。非線形最適化問題の場合、問題ごとに目的関数や制約関数の非線形性の度合いが異なっている、それらの関数値を一回評価するのに要する計算量が大きいか小さいかによって、許容できる関数評価の回数が異なる、などの理由から、どのような問題にもよい結果を与える手法の発見は今後も困難であると考えられる。このため、最適設計システム構築のためには、現在までに提案されたアルゴリズムの中でいくつか代表的なものを選択し、それらの得失を十分に吟味した上で、問題ごとにその性格に適したものをを用いるのが最善の道である。

以上のような観点から、OPTSYSの最適化部は、式(2-1)で表わされる問題を解くために三つの異なる最適化手法を備えている。一つは、いわゆる変換法的一种である乗数法である。変換法の代表的なものとしては、古くから知られたペナルティ関数法があるが、乗数法はより探索効率の良い方法として用いられるようになった。もう一つは、逐次線形化法的一种である内接球法である。一次元探索を必要としないため、最適値探索に要する関数評価回数が極めて少ないのが特徴である。最後は、直接探索法的一种である可能方向法である。この方法は一次元探索を必要とするが、変換法や線形化法のように設計空間をゆがめることがないため、安定した収束性をもつ。以下、それぞれの手法について説明を行なう。

2-5-1 乗数法

制約条件付き最小化問題を、一連の制約条件なし最小化問題の列に変換し、後者を解くことによって前者の解を求めようとする方法を変換法（transformation method）、あるいはSUMT⁽²³⁾と呼ぶ。乗数法（multiplier method）^{(23),(24)}は、ペナルティ関数法と共に変換法の代表的手法である。ペナルティ関数法は、目的関数に重み付けをした制約条件を加えて、新たに疑似目的関数（pseudo-objective function）としてその無制約最小化を行なおうとする方法である。しかしこの方法は最適性の条件が考慮されておらず、その収束速度や内部パラメータに関する不安定性が問題となることが多かった。

乗数法では、ペナルティ関数法のもつこのような欠点を補うため、次式で表わされる

拡張ラグランジュ関数（augmented Lagrangian function）を疑似目的関数として、制約条件付き最小化問題を制約条件なし最小化問題に変換する。

$$L_t(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \frac{1}{2t_j} \left[\max\{0, \lambda_j + t_j g_j(\mathbf{x})\}^2 - (\lambda_j)^2 \right] \quad (2-2)$$

拡張ラグランジュ関数とは、式(2-1)で表わされる問題に対するラグランジュ関数に2次のペナルティ関数（式(2-2)の第3項）を付け加えたものである。ここで、 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ は最適点において Kuhn-Tucker 乗数 $\boldsymbol{\lambda}^*$ となるパラメータ、また t_j はペナルティパラメータである。

問題(2-1)の最適解 \mathbf{x}^* を求めるためには、十分に大きな t_j の値と、 $\boldsymbol{\lambda}^*$ に対して、拡張ラグランジュ関数を疑似目的関数とした制約条件なしの最小化を行えばよいことが証明されている⁽²⁶⁾。図2-5に、図2-2に示した設計空間に対応する乗数法での疑似目的関数空間の概念的形状を示す。

拡張ラグランジュ関数の制約条件なし最小化にはいくつかの方法が考えられる。目的関数の導関数を用いるかどうかで最小値の探索効率には差がある。それらのうち、Nelder-Meadのシンプレックス法⁽²⁷⁾を代表とする目的関数値だけを評価しながら探索を進める方法は、アルゴリズムが簡便であること、導関数を求める手間が不要であることなどの利点がある。しかし、設計変数の数が多い場合には、収束に要する関数評価回数が極端に多くなるという欠点が避けられない。これとは逆に、ニュートン法のように目的関数の二次導関数までを用いる方法は、収束が大変速いという長所をもつ。しかし、すべての設計変数に関する二次導関数を求めること自体が困難であること、かりにそれが得られたとしても、それぞれの二次導関数によって構成されるヘッセ行列が正定でない場合に、収束の保証がないことなどの欠点がある。

以上のような観点から、構造物の最適設計では、目的関数の一階導関数だけを用いる方法が良好な探索効率を達成できると考えられる。一般的には、古典的な最急降下法や準ニュートン法などが知られている。それらの方法では、二階導関数を用いるニュートン法も含め、共通に次のような最適値探索手順をとる。

[手順1] 現設計ベクトルを決定し、そこでの目的関数値およびその導関数値を算出する。

[手順2] 目的関数値およびその導関数値を用いて現設計点からの探索方向ベクトルを決定する。

[手順3] 探索ベクトルの方向に一次元探索を行ない、最小値を見いだす。

[手順4] 得られた最小値が最適基準を満足していれば終了し、そうでなければ[手順1]に戻る。

上の手順で、現設計点からの探索方向ベクトルは次式で定義される。

$$\mathbf{d}_k = -\mathbf{H}_k \nabla f(\mathbf{x}_k) \quad (2-3)$$

\mathbf{d}_k ; k 回目の繰り返しでの探索方向ベクトル

\mathbf{H}_k ; 降下方向係数行列

\mathbf{x}_k ; 設計変数ベクトル

$\nabla f(\mathbf{x}_k)$; 目的関数の勾配ベクトル

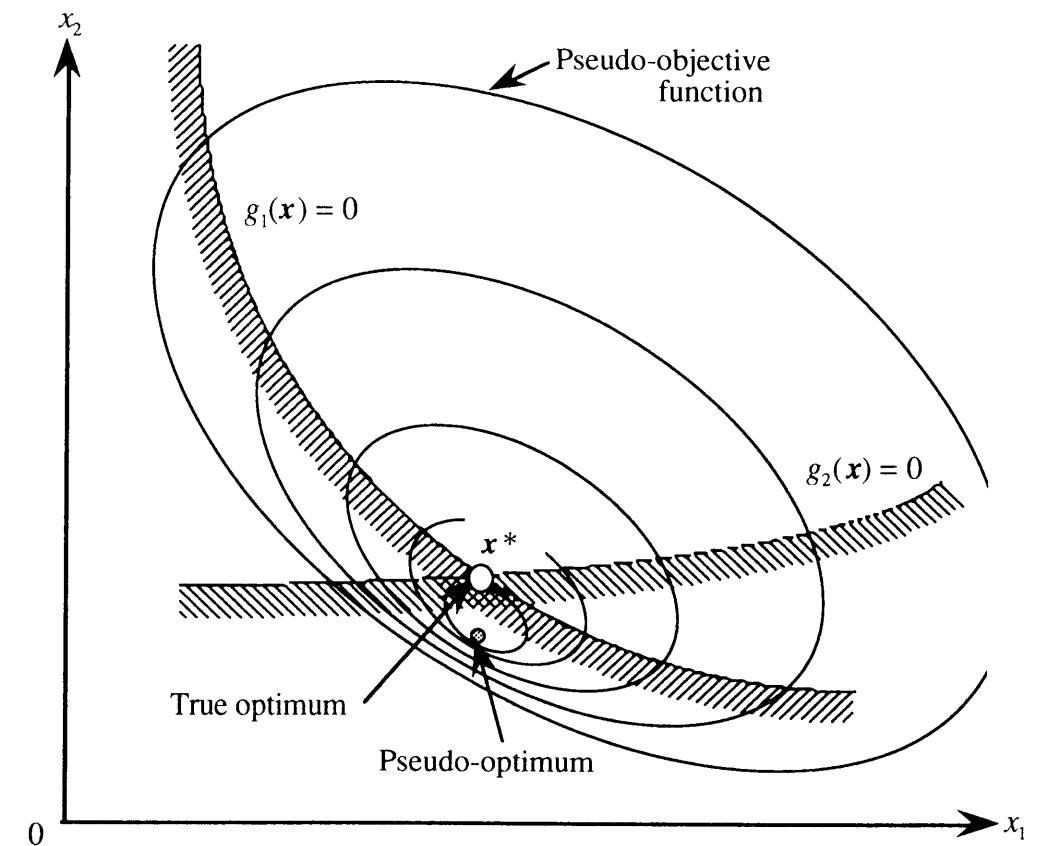


図2-5 乗数法における疑似目的関数と疑似最適値

式(2-3)の表記は各手法で共通であり、行列 \mathbf{H} が単位行列であるときに最急降下法、ヘッセ行列であるときにニュートン法の探索方向ベクトルを表わす。準ニュートン法はニュートン法におけるヘッセ行列のかわりに、一階導関数のみを含む漸化式によって行列 \mathbf{H} を更新するという手続きをとる⁽³⁰⁾。最急降下法の不安定性は多くの文献で指摘されており、またヘッセ行列をもちいるニュートン法は上述の理由により採用できない。従ってOPTSYSでは、探索効率と数値的安定性の両面で優れている準ニュートン法を採用した。降下方向係数行列を近似する漸化式としては、つぎのBFGS公式^{(31)～(34)}を用いる。

$$\mathbf{H}_{k+1} = \left\{ \mathbf{I} - \frac{\delta_k(\gamma_k)^t}{(\delta_k)^t \gamma_k} \right\} \mathbf{H}_k \left\{ \mathbf{I} - \frac{\gamma_k(\delta_k)^t}{(\delta_k)^t \gamma_k} \right\} + \frac{\delta_k(\delta_k)^t}{(\delta_k)^t \gamma_k} \quad (2-4)$$

ただし、式(2-4)で \mathbf{I} は単位行列であり、また、 δ_k および γ_k は次式で定義される。

$$\delta_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k \quad (2-5)$$

$$\gamma_k = \nabla f(\mathbf{x}_{k+1}) - \nabla f(\mathbf{x}_k) \quad (2-6)$$

式(2-3)で決定された探索方向での最小値を見いだす一次元探索には、Vanderplaatsによって改善され、詳しくその手続きが示された3次多項式補間法⁽²⁹⁾を用いる。

また、拡張ラグランジュ関数の任意設計変数 x に関する一階導関数は次のように表わされる。

$$\frac{\partial L_i(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial x} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x} + \sum_{j=1}^m \left[\max\{0, \lambda_j + t_j g_j(\mathbf{x})\} \frac{\partial g_j(\mathbf{x})}{\partial x} \right] \quad (2-7)$$

2-5-2 内接球法

最適構造設計問題においては、目的関数および制約関数の両者はいずれも、一般には設計変数に関する非線形関数となる場合が多い。これらの関数を現設計点まわりで線形近似し、それによって生成された設計空間内で逐次的に設計解の改良を図ろうとする一群の手法を、逐次線形化法（successive linearization technique）と呼ぶ。代表的なものには、逐次線形計画法（successive linear programming）および内接球法（method of centers, inscribed hypersphere method）がある。このうち、逐次線形計画法は、線形化された目的関数および制約関数より構成される最適化問題の解を線形計画法によって求め

る手法である。そして、得られた解を現設計として再び線形化を行なうという手続きを繰り返すことによって、もとの非線形な最適設計問題の解が求められる。線形計画問題については、近年になって非常に高速な解法⁽³⁸⁾の発表があるなどの進展も見られ、設計変数の総数が通常の工学設計問題で必要となる程度（数十ないし数百）ならば、Dantzigが1940年代の後半に開発したシンプレックス法⁽³⁷⁾によって安定に大域的最適解が求められる。したがって、最適設計問題において目的関数や制約関数があまり強い非線形性を持たない限り、逐次線形計画法は合理的な方法であるといえる。

しかし、構造物の最適設計問題では、たとえばはりの曲げ問題において、はりの断面二次モーメントが断面の高さ寸法の3乗に比例するなど、非常に基本的な問題においても、目的関数や制約関数の線形近似があまり妥当性を持たないことが多い。そのような場合に、毎回の線形計画の実行のたびに設計空間の端点が最適解となる逐次線形計画法は解の振動、発散を招きやすい。なぜなら、凸な非線形設計空間を線形近似すると、線形化された設計空間の端点は必ずもとの非線形設計空間の外側に存在するためである。OPTSYSで採用した内接球法は、逐次線形計画法のもつこのような欠点を改善し、しかもその高速さは保持している手法である⁽³⁵⁾。以下にその手順を示す。

図2-6に示すように、 k 回目の繰り返しでの目的関数および制約関数を、第一次の項までテイラー展開することにより線形近似する。

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_k) + (\mathbf{x}^T - \mathbf{x}_k^T) \nabla f(\mathbf{x}_k) \quad (2-8)$$

$$g_j(\mathbf{x}) = g_j(\mathbf{x}_k) + (\mathbf{x}^T - \mathbf{x}_k^T) \nabla g_j(\mathbf{x}_k) \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (2-9)$$

ここで、 \mathbf{x}_k は k 回目の繰り返しでの設計変数ベクトルである。次に、目的関数値を減少させることも制約条件と考え、式(2-8)および式(2-9)が作る n 次元超平面に内接する超球のうち、最大半径をもつ超球の中心点の座標を求めてこれを更新された設計点 \mathbf{x}_{k+1} とする。このとき、次の関係が成立する。

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{s}_k \quad (2-10)$$

ここで、 \mathbf{s}_k は \mathbf{x}_k から \mathbf{x}_{k+1} への移動ベクトルである。 \mathbf{x}_{k+1} から線形化された目的関数までの距離 h_k 、および線形化された制約関数までの距離 h_j はそれぞれ次のように表わさ

れる。

$$h_k = -\frac{s_k^T \nabla f(x_k)}{|\nabla f(x_k)|} \quad (2-11)$$

$$h_j = -\frac{g_j(x_k) - s_k^T \nabla g_j(x_k)}{|\nabla g_j(x_k)|} \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (2-12)$$

ここで、 k 回目の繰り返しにおける内接球の半径 r_k と、距離 h_k および h_j との間には次の関係が成立する。

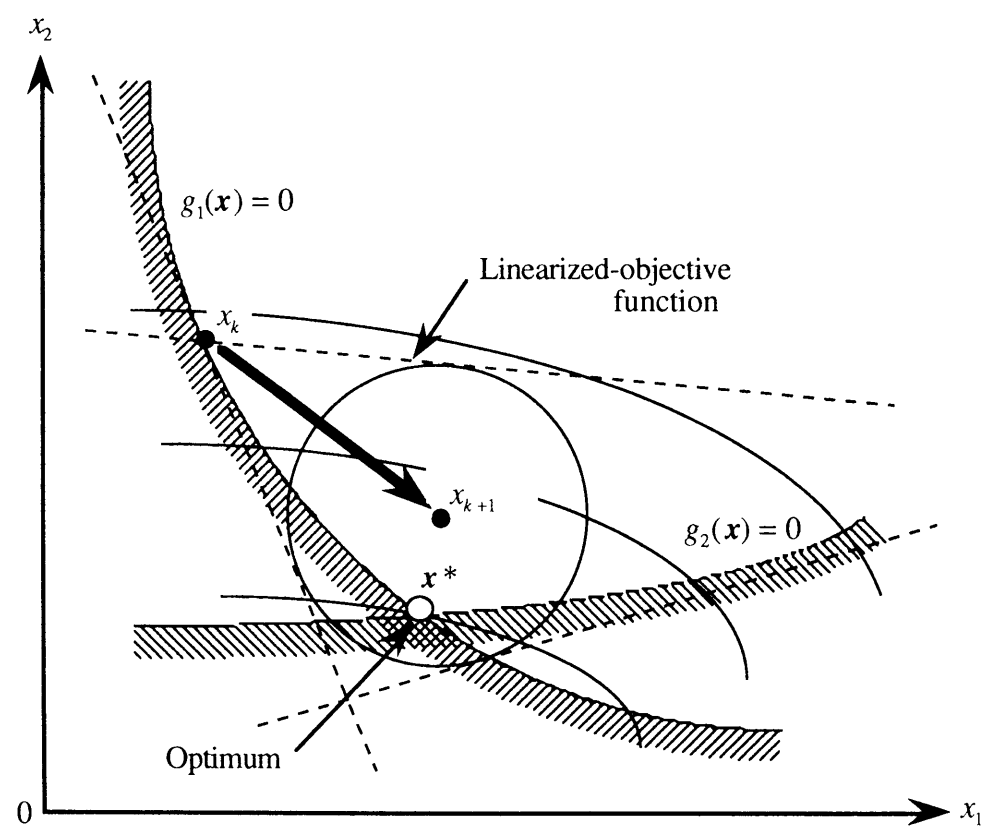


図2-6 内接球法による最適値の探索

$$h_k - r_k \geq 0 \quad (2-13)$$

$$h_j - r_k \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (2-14)$$

さらに、非線形性の強い問題への対策として、設計変数の移動を制限するため、各繰り返し段階において以下のように移動限界 (move limit) を設定する。

$$(1 - \alpha)x_{k,i} \leq x_{k+1,i} \leq (1 + \alpha)x_{k,i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2-15)$$

ここで $x_{k,i}$ は k 回目の繰り返しにおける設計変数ベクトルの第 i 番目の成分であり、 α は移動限界の幅を決定する正の係数である。移動限界の設定により、一回の繰り返しで設計変数の移動できる領域が、図2-7に示すように正方形 (n 次元立方体) 内に制限される。

以上より、内接球法では、新しい設計変数ベクトル x_{k+1} を見いだすために、式(2-13)と

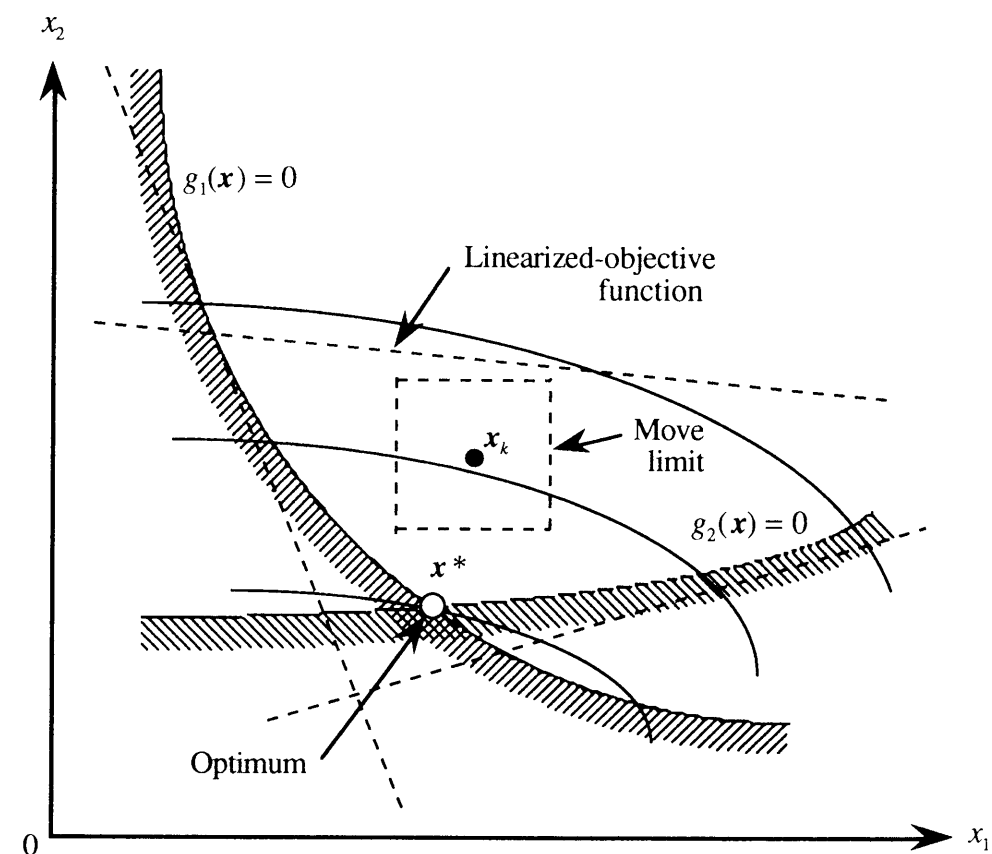


図2-7 内接球法における移動限界の設定

式(2-14)に式(2-11)と式(2-12)を代入して得られる条件を満足しつつ、移動限界の範囲内で r_k を最大化する問題を解くことになる。すなわち、

$$\left. \begin{array}{l} \text{目的関数：} r_k \rightarrow \max \\ \text{制約条件：} \nabla^T f(\mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{s}_k + |\nabla^T f(\mathbf{x}_k)| r_k \leq 0 \\ \nabla^T g_j(\mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{s}_k + |\nabla^T g_j(\mathbf{x}_k)| r_k + g_j(\mathbf{x}_k) \leq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m) \\ (1 - \alpha)x_{k,i} \leq x_{k,i} \leq (1 + \alpha)x_{k,i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{array} \right\} \quad (2-16)$$

式(2-16)で定式化された問題は、移動ベクトル \mathbf{s}_k の n 個の成分と内接球の半径 r_k を変数とした $n+1$ 次元の線形計画問題であり、上述のシンプレックス法により容易に解を求めることができる。そして \mathbf{s}_k が求められれば、式(2-10)によって新たな設計変数ベクトル \mathbf{x}_{k+1} が決定される。

以上の記述より明らかなように、内接球法は各繰り返し段階において常に目的関数と制約関数に対して等距離の解が得られるという性質を持っている。そしてこれが非線形な設計空間を線形化して解を求めたときに生ずる、もとの設計空間からの解の逸脱を抑制する。また内接球法では、一次元探索を行わないため、線形化が妥当性をもつ問題に対しては早い収束が期待できる。

2-5-3 可能方向法

上の項で述べた二つの最適化手法は、いずれももとの非線形設計空間を逐次的に変形して解を求めるものであった。乗数法は制約条件をペナルティ関数として目的関数に取り込んで問題の無制約化を図る変換法であり、また内接球法では目的関数と制約関数を線形化して取り扱う。これに対し、可能方向法⁽³⁶⁾は、もとの設計空間をまったく変形することなく最適値の探索を行なう直接法の一つである。先の二手法が、設計空間の変形に起因する数値的悪条件や設計空間からの解の逸脱を完全には回避できないことを考慮すると、最適化部が最適化問題の解法の一つとして直接法を持つことの意義は大きい。

可能方向法による最適値の探索は、次のような手順で進められる。

[手順1] すべての制約条件のうち、現設計点とその近傍にある（アクティブな）制約条件を探す。

[手順2] 目的関数を減少させ、かつアクティブな制約条件を乱すことのない探索方向ベクトルを見いだす。

[手順3] 見いだした探索方向へ一次元探索を行ない、最小値を求める。

[手順4] その最小値が最適基準を満足しているなら終了。そうでないなら[手順1]に戻る。

実際には、現設計点がアクティブな制約条件を持たず、すべての制約の内側にある場合もある。OPTSYSで採用した可能方向法では、これら二通りの場合に対して以下のように対応する。

(1) 現設計点がアクティブな制約条件を持たない場合

この場合は、制約なし最適化問題であると考え、乗数法の項で述べたBFGS公式に基づく準ニュートン法を用いる。ただし、一次元探索の過程でいずれかの制約条件がアクティブとなった場合は、その点を次の設計点とする。

(2) 現設計点がアクティブな制約条件を持つ場合

この場合は、探索方向は次のようにして決定する。今、 k 回目の繰り返しでの設計ベクトル \mathbf{x}_k が、図2-8に示すように制約条件 $g_1(\mathbf{x}) \leq 0$ に関してアクティブであるとする。このとき、探索ベクトル \mathbf{d}_k がとるべき方向は次の二つの条件を同時に満足していなければならない。

- ① 目的関数値を減少させる有効な (usable) 方向であること
- ② 制約条件を乱さない可能な (feasible) 方向であること

これらの条件は、図2-8において探索ベクトル \mathbf{d}_k が目的関数の接線と制約条件の接線に囲まれた有効可能領域 (usable-feasible sector) 内を向いていることを要求する。このことはすなわち、 \mathbf{d}_k がこの点における目的関数と制約関数の勾配ベクトル $\nabla f(\mathbf{x}_k)$ および $\nabla g_1(\mathbf{x})$ との間に次の関係を持つことを意味する。

$$\nabla^T f(\mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{d}_k \leq 0 \quad (2-17)$$

$$\nabla^T g_1(\mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{d}_k \leq 0 \quad (2-18)$$

図2-8からも明らかなように、これらの条件を満たす \mathbf{d}_k のうちで最も効果的に目的関数の値を減少させるのは、制約関数 $g_1(\mathbf{x}_k)$ の接線に沿って降下する方向である。しかしながら、凸な非線形設計空間では、この接線方向への降下は即座に設計可能領域外への

逸脱をもたらす。このような事態を回避するためには、接線方向からやや内側に探索方向ベクトルの方向を向ける必要がある。したがって式(2-18)は、方向修正パラメータ θ ($\theta \geq 0$) を導入することにより以下のように修正される。

$$\nabla^T g_1(\mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{d}_k + \theta \leq 0 \quad (2-19)$$

さて、探索方向ベクトル \mathbf{d}_k は、式(2-17)および式(2-19)の左辺が、いずれもできるだけ小さくなるように決定されることが望ましい。なぜなら、そのほうが目的関数に関してアクティブな制約関数に関して最急降下方向に近づくためである。しかし、これら二つの条件の間には一般に、一方を減少させようとするとは他方が増加するトレードオフ関係が存在する。したがって、ここでは式(2-17)および式(2-19)の左辺の値の大きいほうを逐次選んで最小化する方策をとる。この問題は以下のように定式化される。

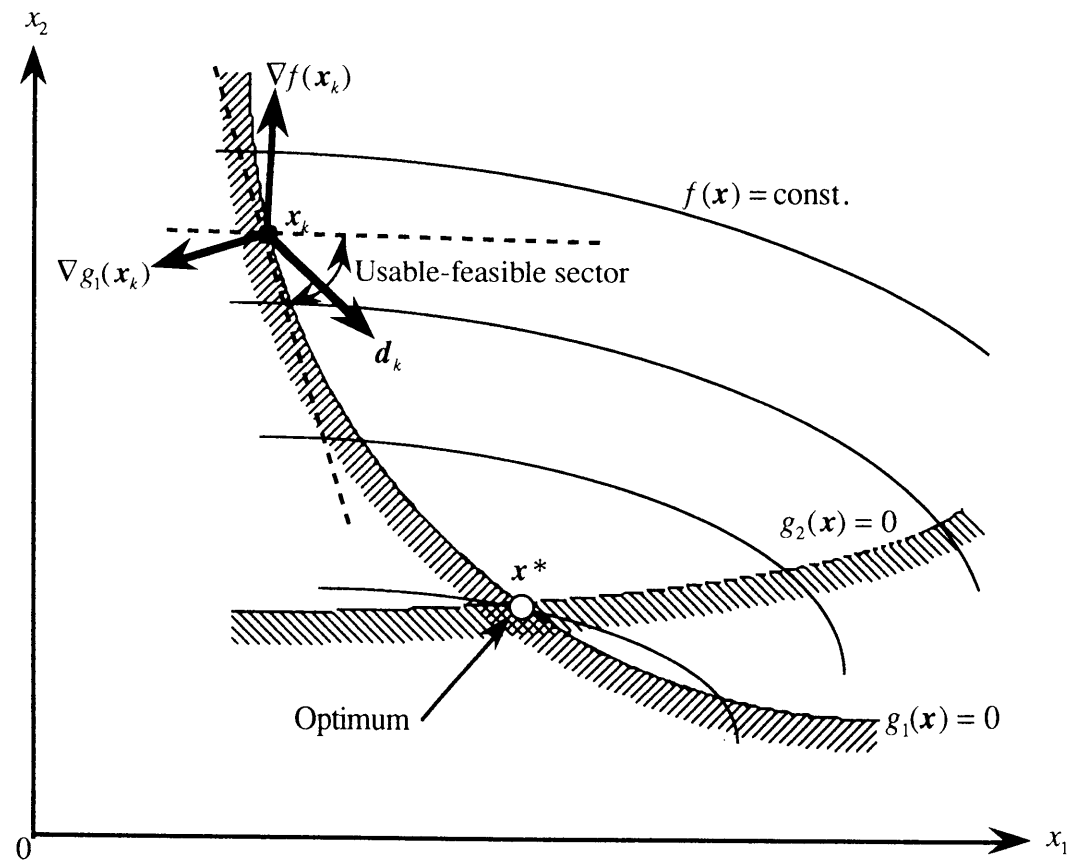


図2-8 可能方向法による探索ベクトルの決定

$$\left. \begin{array}{l} \text{目的関数: } \max (\nabla^T f(\mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{d}_k, \nabla^T g_1(\mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{d}_k + \theta) \rightarrow \min \\ \text{制約条件: } -1 \leq d_{k,i} \leq 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{array} \right\} \quad (2-20)$$

式(2-20)の制約条件は探索方向ベクトル \mathbf{d}_k の大きさを規制するために必要である。ここで、 $d_{k,i}$ は探索方向ベクトル \mathbf{d}_k の第 i 番目の成分である。したがって、式(2-20)で表わされる問題は、 \mathbf{d}_k の各成分に関する線形計画問題の形式をなしている。しかしながら、この定式化による目的関数は、その一階導関数が連続でなく、一般的なシンプレックス法では解くことができない。したがって、ここで新たな独立変数 σ を導入し、上の問題を次の形式に等価変換する。

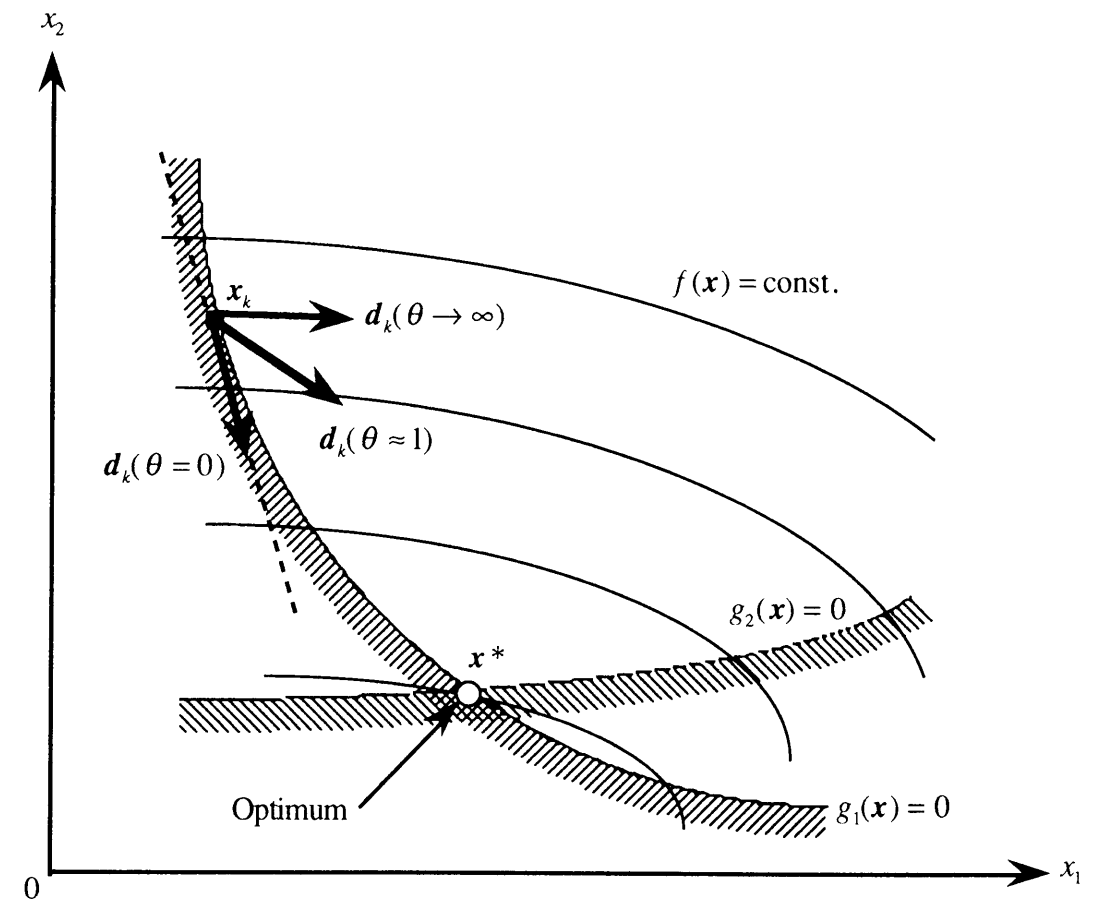


図2-9 パラメータ θ による探索方向の変化

$$\left. \begin{array}{l} \text{目的関数： } \sigma \rightarrow \min \\ \text{制約条件： } \nabla^T f(\mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{d}_k \leq \sigma \\ \nabla^T g_i(\mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{d}_k + \theta \leq \sigma \\ -1 \leq d_{k,i} \leq 1 \quad (i=1,2,\dots,n) \end{array} \right\} \quad (2-21)$$

この変換により、解くべき線形計画問題の次数は $n+1$ へと増加するが、目的関数と制約関数の連続性は保たれるため、シンプレックス法を用いて安定に解を求めることができる。ただし、パラメータ θ の適切な値は設計空間の非線形性の強さに応じて決められなければならない。

2-6 結言

本章では、最適構造設計として取り扱う問題の定式化、およびその問題を解くために構築した最適構造設計プログラムシステム OPTSYS の解析部と最適化部についての記述を行なった。OPTSYSの解析部に採用した SAPIVは歴史のある有限要素法構造解析コードであり、その評価は既に定まったものがある。このため、ここではその詳細については立ち入った記述を行わず、使用できる有限要素と解析タイプ、および OPTSYS 構築にあたって留意した点などを述べるにとどめた。これに対し、最適化部に関しては、選択可能な三つの非線形最適化手法について、一通りその理論を記述した。本文中でも述べたように、非線形最適化問題に対して決定的に優位性をもつ解法は今のところない。したがって、設計者はその問題の非線形性の度合いや、一回の関数評価に要する計算時間などを見きわめた上で適切な手法を選択しなければならない。OPTSYSで採用した三つの最適化手法はそれぞれに異なった特色をもち、理論的には表2-2のように整理することができる。

表2-2 OPTSYSのもつ最適化手法の特色

	解法の種別	大域的収束の証明	収束の速さ
乗数法	変換法	なされている	遅い
内接球法	線形化法	なされていない	速い
可能方向法	直接法	なされている	やや遅い

表2-2より、非線形性の強い問題には乗数法や可能方向法が、また、関数評価に多くの計算量が必要な場合には内接球法が有効であるという指針が得られる。さらに、これら三つの最適化手法のそれぞれには使用者が設定すべきパラメータがある。乗数法におけるペナルティパラメータ t 、内接球法における移動限界パラメータ α 、可能方向法における方向修正パラメータ θ がそれであり、いずれも探索効率や収束性に影響を及ぼす。これらの値を問題ごとに適切に設定することで、最適値の探索をより速く安定に行なうことが可能になる。しかしそのためには、設計者は固有技術的観点から問題の非線形性の度合いを予測することが必要である。そして、複数の手法で探索を試行し、結果の良質な方を選択するという手続きもまた実務上有効であると考えられる。

第3章 OPTSYSにおける感度解析

3-1 緒言

一般に、設計変数に関する目的関数と制約関数の導関数を算出することを感度解析と呼ぶ。また、その導関数の値を感度係数と呼ぶ。第2章で述べたように、OPTSYSの最適化部で採用された三つの最適化手法はいずれも目的関数と制約関数の一階導関数を必要とするものであるため、解析部においては感度解析を行なうことが要求される。感度解析の最も基本的な方法は、微分係数の定義に基づき、次のような差分近似を行なうことである。

$$\text{前進差分：} \quad \frac{\partial f(\mathbf{x}_k)}{\partial x_i} \equiv \frac{f(\mathbf{x}_k + \Delta \mathbf{x}_{k,i}) - f(\mathbf{x}_k)}{\Delta x_i} \quad (3-1)$$

$$\text{中央差分：} \quad \frac{\partial f(\mathbf{x}_k)}{\partial x_i} \equiv \frac{f(\mathbf{x}_k + \Delta \mathbf{x}_{k,i}) - f(\mathbf{x}_k - \Delta \mathbf{x}_{k,i})}{2\Delta x_i} \quad (3-2)$$

ここで、 \mathbf{x}_k は現設計点における設計変数ベクトル、 x_i はその第 i 番目の成分である。また、 $\Delta \mathbf{x}_{k,i}$ は第 i 成分のみ Δx_i の値をもち、それ以外の成分は 0 であるような n 次元ベクトルである。

このような数値差分法は、プログラム作成が極めて容易であるという利点がある反面、差分値の精度が刻み幅 Δx_i のとり方に依存し、しかも適切な刻み幅の値は前もって明らかではないという欠点がある。精度に関しては、中央差分は前進差分にくらべて一般に良い結果を与えるが、逆に計算時間の点ではるかに不利である。なぜなら、数値差分を行なう場合、現設計点での関数値 $f(\mathbf{x}_k)$ を求める以外に、前進差分では $f(\mathbf{x}_k + \Delta \mathbf{x}_{k,i})$ 、中央差分では $f(\mathbf{x}_k + \Delta \mathbf{x}_{k,i})$ および $f(\mathbf{x}_k - \Delta \mathbf{x}_{k,i})$ の両方の関数値をすべての設計変数に関して求めなければならないからである。目的関数や制約関数の値が簡単に求められる問題は別として、最適構造設計で取り扱う問題は、一回の構造解析にも相当の計算時間を要する場合がほとんどである。このため、上述のような差分法による感度解析では、現実的な時間内に問題の解を求めることは不可能であると言ってよい。したがって、中規模以上の最適構造設計のための感度解析手法としては、解析的な方法が選択されなければならない。

さて、解析的な感度解析手法にも、設計空間法⁽³⁹⁾、挙動空間法⁽⁴⁰⁾、ひずみエネルギー法⁽⁴¹⁾などがある。しかしひずみエネルギー法は、はり要素の断面積、断面 2 次モーメントなど、要素剛性行列の成分に対して線形関係を持つ設計変数に関する静的な感度解析には有効であるが、本研究での目的の一つとしているはり要素の節点座標値に関する感度解析には適用できない。また、挙動空間法は、制約式の数が設計変数の数よりも少ない場合は直接法よりも高速であるが、最適設計問題の定式化によっては逆に制約式の数が増える場合もあり、一概に設計空間法よりも優れているとは言えない。したがって、OPTSYSにおける感度解析は剛性方程式を直接微分する設計空間法によることとした。

本章ではまず、3-2節でフレーム構造物の静的な感度解析手法について述べる。そして、続く 3-3節と 3-4節では実固有値解析における固有値と固有ベクトルの感度解析について述べる。特に、固有ベクトルの感度解析については動的な最適構造設計の全体的な効率を左右する重要な部分であるため、いくつかの既存手法の得失について詳述する。また 3-5節では、設計対象としている機械構造系がゼロ固有値をもつ場合の固有値と固有ベクトルの感度解析法について述べる。さらに 3-6節では、モード法による周波数応答解析における感度解析について述べ、3-7節では強制加振を受ける機械構造物の振動対策を行なう場合に必要となる加速度応答振幅の感度係数を算出する。

3-2 静的変位および質量の感度解析

本節では最初に、フレーム構造物の静的解析において取り扱う静的変位および構造質量に対して、はり要素の断面特性と要素構成節点に関する一階の導関数を求める方法を述べる。そして次に、円管の断面寸法に関する感度係数の算出法について述べる。

3-2-1 静的変位の感度係数

有限要素変位法による静的問題は、次の全体剛性方程式によって記述される。

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{p} \quad (3-3)$$

\mathbf{K} ; 全体剛性行列

\mathbf{u} ; 変位ベクトル

\mathbf{p} ; 荷重ベクトル

荷重ベクトル \mathbf{p} が構造パラメータに依存しない場合、式(3-3)の両辺を設計変数 x で偏微分すると次式を得る。

$$\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x} \mathbf{u} = 0 \quad (3-4)$$

ここで、左辺第二項を右辺へ移項すると、次式を得る。

$$\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = -\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x} \mathbf{u} \quad (3-5)$$

式(3-5)は、 \mathbf{K} を係数行列とした連立一次方程式であり、その右辺は式(3-3)との形式上の同一性より、疑似荷重ベクトルと呼ばれている。実際には、求めるべき感度係数ベクトル $\{\partial \mathbf{u} / \partial x\}$ は、構造解析の段階で式(3-3)を解く際に求められた \mathbf{K} のコレスキー分解を保存しておくことによって、効率的に計算される。ここで、式(3-5)の右辺に現われる変位ベクトル \mathbf{u} は既に求められているため、疑似荷重ベクトルを計算するためには剛性行列の感度 $\{\partial \mathbf{K} / \partial x\}$ を求める必要がある。このことを行なうために、式(3-3)で表わされる全体剛性方程式を、次のように要素レベルに分解して表現する。

$$\sum_{e=1}^E (\mathbf{K}_w^{(e)} \mathbf{u} + \mathbf{p}_w^{(e)}) = 0 \quad (3-6)$$

$\mathbf{K}_w^{(e)}$; 要素番号 e の全体座標系での要素剛性行列
 $\mathbf{p}_w^{(e)}$; 要素番号 e の全体座標系での節点力ベクトル
 E ; 全要素数

ここで、

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^E \mathbf{K}_w^{(e)} \quad (3-7)$$

$$\mathbf{p} = -\sum_{e=1}^E \mathbf{p}_w^{(e)} \quad (3-8)$$

である。式(3-6)を設計変数 x で微分して移項すると次式を得る。

$$\sum_{e=1}^E \mathbf{K}_w^{(e)} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = -\sum_{e=1}^E \frac{\partial \mathbf{K}_w^{(e)}}{\partial x} \mathbf{u} \quad (3-9)$$

式(3-5)と式(3-9)の右辺を比較すると、全体剛性行列の感度 $\{\partial \mathbf{K} / \partial x\}$ は要素剛性行列ごとに感度 $\{\partial \mathbf{K}_w^{(e)} / \partial x\}$ を求め、それを全要素について加えあわせればよいことがわかる。以下に、設計変数が (1)はり要素の断面特性の場合、(2)はり要素の構成節点の場合の両者について、 $\{\partial \mathbf{K}_w^{(e)} / \partial x\}$ を示す。

(1)はり要素の断面特性に関する感度係数

OPTSYSの解析部に採用したSAPIVのはり要素は、図3-1に示すような要素座標系を持つ。原点は始点 i であり、 X 軸は始点 i と終点 j によって決められる。ベクトル \mathbf{V} は要素座標系の XY 平面を決定するためのベクトルである。実際には X 軸とベクトル \mathbf{V} の外積によって Z 軸が決められ、最後に Y 軸が Z 軸と X 軸の外積によって定められる。その要素座標系における要素剛性行列は式(3-10)で表わされる。

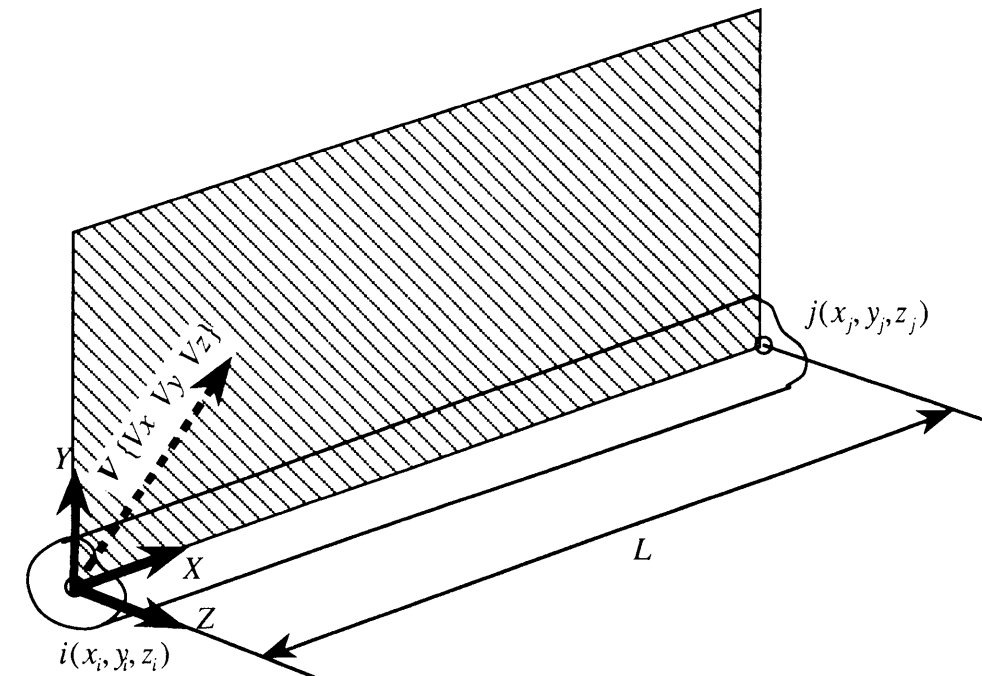


図 3-1 はり要素の要素座標系

$$\mathbf{K}_e^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

SYM.

(3-10)

ここで、 $\mathbf{K}_e^{(e)}$; 要素座標系における要素剛性行列
 A ; 断面積
 I_y ; 要素座標系 Y 軸まわりの慣性モーメント
 I_z ; 要素座標系 Z 軸まわりの慣性モーメント
 J ; ねじり係数
 E ; 縦弾性係数 (ヤング率)
 G ; せん断弾性係数
 L ; 要素長さ

である。

要素座標系における要素剛性行列は、座標変換行列 \mathbf{T} を用いて次のように全体座標系へ変換される。

$$\mathbf{K}_w^{(e)} = \mathbf{T}^t \mathbf{K}_e^{(e)} \mathbf{T} \quad (3-11)$$

座標変換行列 \mathbf{T} ははりの断面特性に対しては独立であるため、全体座標系における要素剛性行列の感度は次のように表わされる。

$$\frac{\partial \mathbf{K}_w^{(e)}}{\partial x} = \mathbf{T}^t \frac{\partial \mathbf{K}_e^{(e)}}{\partial x} \mathbf{T} \quad (3-12)$$

したがって、要素座標系における要素剛性行列の感度を求めることが必要となる。式(3-10)中に現われるパラメータのうち、断面の形状に依存するのは、 A 、 I_y 、 I_z 、 J である。要素剛性行列の感度を求めるために、これらを設計変数として式(3-10)を偏微分した結果を式(3-13)から式(3-16)に示す。

$$\frac{\partial \mathbf{K}_e^{(e)}}{\partial A} = \begin{bmatrix} \frac{E}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{E}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

SYM.

(3-13)

$$\frac{\partial \mathbf{K}_e^{(e)}}{\partial I_y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

SYM.

(3-14)

$$\frac{\partial \mathbf{K}_e^{(e)}}{\partial I_z} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{0}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{0}{L^2} & 0 & -\frac{12E}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{0}{L^2} \\ & 0 & 0 & 0 & \frac{6E}{L^2} & 0 & -\frac{12E}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E}{L^2} \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \frac{4E}{L} & 0 & -\frac{6E}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2E}{L} \\ & & & & & 0 & \frac{12E}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6E}{L^2} \\ & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & \frac{4E}{L} \end{bmatrix} \quad (3-15)$$

SYM.

$$\frac{\partial \mathbf{K}_e^{(e)}}{\partial J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{G}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{G}{L} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & \frac{G}{L} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (3-16)$$

SYM.

(2)は要素の構成節点座標に関する感度係数

この場合は、座標変換行列 \mathbf{T} が要素の構成節点の座標値に対して従属であるため、全体座標系における要素剛性行列の感度は、式(3-10)を微分することによって次のように導かれる。

$$\frac{\partial \mathbf{K}_w^{(e)}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{T}'}{\partial x} \mathbf{K}_e^{(e)} \mathbf{T} + \mathbf{T}' \mathbf{K}_e^{(e)} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x} + \mathbf{T}' \frac{\partial \mathbf{K}_e^{(e)}}{\partial x} \mathbf{T} \quad (3-17)$$

最適化を行なう節点は、図3-1に示したはり要素の始点 $i(x_i, y_i, z_i)$ であるかまたは終点 $j(x_j, y_j, z_j)$ である。このため、式(3-17)の設計変数としてはこれら6個の座標値 $x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j$ を考慮する必要がある。ただしここでは、要素座標系の XY 平面を決めるベクトル \mathbf{V} は最適化の過程で変化しないこととする。以下に、式(3-17)に現われる座標変換行列および要素座標系における要素剛性行列の感度について述べる。

まず、座標変換行列は以下のように表わされる。

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{T}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \bar{\mathbf{T}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & \bar{\mathbf{T}} & \mathbf{0} \\ & & & \bar{\mathbf{T}} \\ \text{SYM.} & & & \bar{\mathbf{T}} \end{bmatrix} \quad (3-18)$$

ここで $\bar{\mathbf{T}}$ と $\mathbf{0}$ は三次元の行列であり、 $\mathbf{0}$ は零行列、 $\bar{\mathbf{T}}$ は次のように表わされる。

$$\bar{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & v_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & v_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & v_3 \end{bmatrix} \quad (3-19)$$

ここで、

$$\lambda_1 = \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2 + w_1^2}}, \mu_1 = \frac{v_1}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2 + w_1^2}}, v_1 = \frac{w_1}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2 + w_1^2}}$$

$$\lambda_2 = \frac{u_2}{\sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2}}, \mu_2 = \frac{v_2}{\sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2}}, v_2 = \frac{w_2}{\sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2}}$$

$$\lambda_3 = \frac{u_3}{\sqrt{u_3^2 + v_3^2 + w_3^2}}, \mu_3 = \frac{v_3}{\sqrt{u_3^2 + v_3^2 + w_3^2}}, v_3 = \frac{w_3}{\sqrt{u_3^2 + v_3^2 + w_3^2}}$$

$$u_1 = x_j - x_i$$

$$v_1 = y_j - y_i$$

$$w_1 = z_j - z_i$$

$$\begin{aligned}
u_2 &= \{(z_j - z_i)V_x - (x_j - x_i)V_z\}(z_j - z_i) - \{(x_j - x_i)V_y - (y_j - y_i)V_x\}(y_j - y_i) \\
v_2 &= \{(x_j - x_i)V_y - (y_j - y_i)V_x\}(x_j - x_i) - \{(y_j - y_i)V_z - (z_j - z_i)V_y\}(z_j - z_i) \\
w_2 &= \{(y_j - y_i)V_z - (z_j - z_i)V_y\}(y_j - y_i) - \{(z_j - z_i)V_x - (x_j - x_i)V_z\}(x_j - x_i) \\
u_3 &= (y_j - y_i)V_z - (z_j - z_i)V_y \\
v_3 &= (z_j - z_i)V_x - (x_j - x_i)V_z \\
w_3 &= (x_j - x_i)V_y - (y_j - y_i)V_x
\end{aligned}$$

である。今、設計変数 x_i で式(3-18)を微分すると次式を得る。

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{T}}}{\partial x_i} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \frac{\partial \bar{\mathbf{T}}}{\partial x_i} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & \frac{\partial \bar{\mathbf{T}}}{\partial x_i} & \mathbf{0} \\ \text{SYM.} & & & \frac{\partial \bar{\mathbf{T}}}{\partial x_i} \end{bmatrix} \quad (3-20)$$

したがって、全体座標系への座標変換行列 \mathbf{T} の感度は、式(3-19)を x_i で微分することによって得られる $\{\partial \bar{\mathbf{T}}/\partial x_i\}$ から算出される。

次に要素剛性行列の節点座標値に関する感度を求める。式(3-10)は節点座標値に関して陽な関数ではない。しかし要素長さ L は次のように節点座標値の関数である。

$$L = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (3-21)$$

したがって、次式が成立する。

$$\frac{\partial \mathbf{K}_e^{(e)}}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{K}_e^{(e)}}{\partial L} \cdot \frac{\partial L}{\partial x_i} \quad (3-22)$$

式(3-22)の右辺の項はそれぞれ次に示すようになる。

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \mathbf{K}_e^{(e)}}{\partial L} \\
& = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & -\frac{36EI_z}{L^4} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & \frac{36EI_z}{L^4} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} \\ & & -\frac{36EI_y}{L^4} & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{36EI_y}{L^4} & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 \\ & & & -\frac{GJ}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L^2} & 0 & 0 \\ & & & & -\frac{4EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{2EI_y}{L^2} & 0 \\ & & & & & -\frac{4EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{2EI_z}{L^2} \\ & & & & & & -\frac{EA}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & -\frac{36EI_z}{L^4} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} \\ & & & & & & & & \frac{36EI_y}{L^4} & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 \\ & & & & & & & & & -\frac{GJ}{L^2} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & -\frac{4EI_y}{L^2} & 0 \\ & & & & & & & & & & & -\frac{4EI_z}{L^2} \end{bmatrix} \\
& \quad \text{SYM.}
\end{aligned} \quad (3-23)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -(x_j - x_i)/L \quad (3-24)$$

その他の座標値に関しても同様に、以下の微分値が解析的に求められる。

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = (x_j - x_i)/L \quad (3-25)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} = -(y_j - y_i)/L \quad (3-26)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_j} = (y_j - y_i)/L \quad (3-27)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z_i} = -(z_j - z_i)/L \quad (3-28)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z_j} = (z_j - z_i)/L \quad (3-29)$$

3-2-2 質量の感度係数

フレーム構造物の質量は次のように表わされる。

$$M_f = \sum_{m=1}^{n_m} (\rho^{(m)} A^{(m)} \sum_{k=1}^{n_i} L_k^{(m)}) \quad (3-30)$$

ここで、

M_f ; フレーム質量
 $\rho^{(m)}$; 部材 m の質量密度
 $A^{(m)}$; 部材 m の断面積
 $L_k^{(m)}$; 部材 m 第 k 要素の要素長さ
 n_m ; 部材総数
 $n^{(m)}$; 部材 m を構成する要素数

である。以下に、設計変数が (1) はり要素の断面特性の場合、(2) はり要素の構成節点の場合の両者について、質量の感度を示す。

(1) はり要素の断面特性に関する感度係数

式(3-30)中のパラメータで、はり要素の断面特性の関数となるのは断面積のみである。したがって、各部材の 4 つの断面特性値に関して式(3-30)を微分した結果は以下のように表わされる。

$$\frac{\partial M_f}{\partial A^{(m)}} = \rho^{(m)} \sum_{k=1}^{n_i} L_k^{(m)} \quad (3-31)$$

$$\frac{\partial M_f}{\partial I_Y^{(m)}} = \frac{\partial M_f}{\partial I_Z^{(m)}} = \frac{\partial M_f}{\partial J^{(m)}} = 0 \quad (3-32)$$

(2) はり要素の構成節点座標に関する感度係数

式(3-30)中のパラメータで、はり要素を構成する節点の座標値の関数となるのは要素長さである。今、節点 i の x 座標値 x_i を設計変数として式(3-30)を微分すると次式を得る。

$$\frac{\partial M_f}{\partial x_i} = \sum_e \rho^{(e)} A^{(e)} \frac{\partial L^{(e)}}{\partial x_i} \quad (3-33)$$

ここで、右辺の総和記号は、節点 i を始点あるいは終点に持つはり要素のすべてにつ

いての和をとることを意味する。要素長さの節点座標による微分については、すでに式(3-24)から式(3-29)に示した。

3-2-3 はりの断面寸法に関する感度係数

前項までに、フレーム構造物の静的変位と質量のそれぞれについて、感度係数の算出法を述べた。ここまでは、断面特性に関する感度については、断面積や断面二次モーメントなど、要素剛性行列内で互いに独立な量を設計変数としてきた。しかし、現実のフレーム構造物の最適設計を行なう際に、それらの断面特性が独立に決定されることは極めて稀である。多くの場合、設計者が要求されるのは具体的な寸法をもった断面の各部寸法を決定することである。OPTSYSでは円管について、実際の断面寸法を独立変数にとることができる。以下に、この場合の静的変位と重量の感度の算出法について述べる。

円管の場合、独立変数となる断面寸法は、図3-2に示すように直径 ϕ と肉厚 t である。

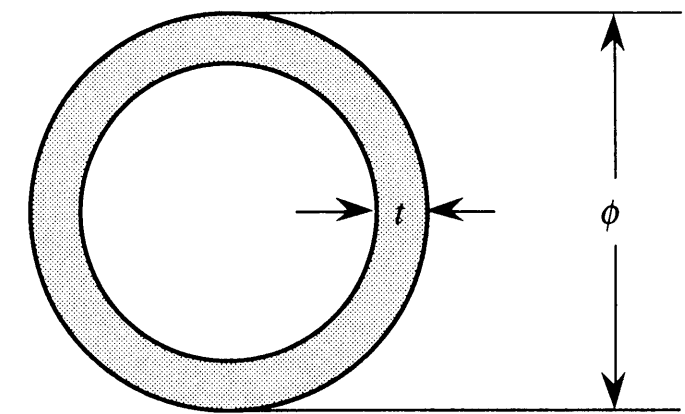


図3-2 円管の断面寸法

円管の断面寸法に関する静的変位の感度係数は、断面特性値を中間変数として以下のように表わされる。

$$\frac{\partial u}{\partial \phi^{(m)}} = \frac{\partial u}{\partial A^{(m)}} \frac{\partial A^{(m)}}{\partial \phi^{(m)}} + \frac{\partial u}{\partial I_Y^{(m)}} \frac{\partial I_Y^{(m)}}{\partial \phi^{(m)}} + \frac{\partial u}{\partial I_Z^{(m)}} \frac{\partial I_Z^{(m)}}{\partial \phi^{(m)}} + \frac{\partial u}{\partial J^{(m)}} \frac{\partial J^{(m)}}{\partial \phi^{(m)}} \quad (3-35)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t^{(m)}} = \frac{\partial u}{\partial A^{(m)}} \frac{\partial A^{(m)}}{\partial t^{(m)}} + \frac{\partial u}{\partial I_Y^{(m)}} \frac{\partial I_Y^{(m)}}{\partial t^{(m)}} + \frac{\partial u}{\partial I_Z^{(m)}} \frac{\partial I_Z^{(m)}}{\partial t^{(m)}} + \frac{\partial u}{\partial J^{(m)}} \frac{\partial J^{(m)}}{\partial t^{(m)}} \quad (3-36)$$

式(3-35)および式(3-36)に現われる静的変位の各断面特性による微分値は、3-2-1項で述べた手続きによって求められる。このため、各断面特性の管直径 ϕ および管肉厚 t による微分を求めることによって、式(3-35)および式(3-36)の値を算出することができる。

部材 m の断面特性は、それぞれ以下のように表わされる。

$$A^{(m)} = \pi \ t^{(m)}(\phi^{(m)} - t^{(m)}) \quad (3-37)$$

$$I_Y^{(m)} = I_Z^{(m)} = \frac{\pi \left\{ (\phi^{(m)})^4 - (\phi^{(m)} - 2t^{(m)})^4 \right\}}{64} \quad (3-38)$$

$$J^{(m)} = \frac{\pi \left\{ (\phi^{(m)})^4 - (\phi^{(m)} - 2t^{(m)})^4 \right\}}{32} \quad (3-39)$$

式(3-37)から式(3-39)は、容易に $\phi^{(m)}$ および $t^{(m)}$ で微分することができ、以下のような結果が得られる。

$$\frac{\partial A^{(m)}}{\partial \phi^{(m)}} = \pi \ t^{(m)} \quad (3-40)$$

$$\frac{\partial A^{(m)}}{\partial t^{(m)}} = \pi (\phi^{(m)} - t^{(m)}) \quad (3-41)$$

$$\frac{\partial I_Y^{(m)}}{\partial \phi^{(m)}} = \frac{\partial I_Z^{(m)}}{\partial \phi^{(m)}} = \frac{\pi \left\{ (\phi^{(m)})^3 - (\phi^{(m)} - 2t^{(m)})^3 \right\}}{16} \quad (3-42)$$

$$\frac{\partial I_Y^{(m)}}{\partial t^{(m)}} = \frac{\partial I_Z^{(m)}}{\partial t^{(m)}} = \frac{\pi (\phi^{(m)} - 2t^{(m)})^3}{8} \quad (3-43)$$

$$\frac{\partial J^{(m)}}{\partial \phi^{(m)}} = \frac{\pi \left\{ (\phi^{(m)})^3 - (\phi^{(m)} - 2t^{(m)})^3 \right\}}{8} \quad (3-44)$$

$$\frac{\partial J^{(m)}}{\partial t^{(m)}} = \frac{\pi (\phi^{(m)} - 2t^{(m)})^3}{4} \quad (3-45)$$

次に、円管の断面寸法に関する質量の感度係数は、静的変位の場合とまったく同様に断面特性値を中間変数として以下のように表わされる。

$$\frac{\partial M_f}{\partial \phi^{(m)}} = \frac{\partial M_f}{\partial A^{(m)}} \frac{\partial A^{(m)}}{\partial \phi^{(m)}} + \frac{\partial M_f}{\partial I_Y^{(m)}} \frac{\partial I_Y^{(m)}}{\partial \phi^{(m)}} + \frac{\partial M_f}{\partial I_Z^{(m)}} \frac{\partial I_Z^{(m)}}{\partial \phi^{(m)}} + \frac{\partial M_f}{\partial J^{(m)}} \frac{\partial J^{(m)}}{\partial \phi^{(m)}} \quad (3-46)$$

$$\frac{\partial M_f}{\partial t^{(m)}} = \frac{\partial M_f}{\partial A^{(m)}} \frac{\partial A^{(m)}}{\partial t^{(m)}} + \frac{\partial M_f}{\partial I_Y^{(m)}} \frac{\partial I_Y^{(m)}}{\partial t^{(m)}} + \frac{\partial M_f}{\partial I_Z^{(m)}} \frac{\partial I_Z^{(m)}}{\partial t^{(m)}} + \frac{\partial M_f}{\partial J^{(m)}} \frac{\partial J^{(m)}}{\partial t^{(m)}} \quad (3-47)$$

しかし、質量は断面二次モーメントおよびねじり係数に関しては式(3-32)に示したように独立であるため、式(3-46)と式(3-37)は次のように簡単化される。

$$\frac{\partial M_f}{\partial \phi^{(m)}} = \frac{\partial M_f}{\partial A^{(m)}} \frac{\partial A^{(m)}}{\partial \phi^{(m)}} \quad (3-48)$$

$$\frac{\partial M_f}{\partial t^{(m)}} = \frac{\partial M_f}{\partial A^{(m)}} \frac{\partial A^{(m)}}{\partial t^{(m)}} \quad (3-49)$$

ここで、式(3-48)および式(3-49)の右辺第一項は式(3-31)により求められ、また第二項はそれぞれ式(3-40)および式(3-41)から求められる。

3-3 固有値の感度解析

本節以降では、構造物の動的挙動に関する感度解析手法について述べる。本節と次節ではまず、実固有値解析での固有値と固有ベクトルの感度の計算法について述べる。そして次に、比例粘性減衰振動系での周波数応答伝達関数の感度を算出する。OPTSYSでは伝達関数の計算はモード合成法を用いて行うため、その感度計算も実固有値解析における固有値と固有ベクトルの感度の計算に帰着されることになる。さらにこれが算出されれば、外力によって加振される構造物におけるある点の加速度応答レベルの絶対値の感度をただちに知ることができる。

さて、固有値の感度係数は、1968年に Fox 等によって提案された以下の方法⁽⁴²⁾によって求めることが効率的であり、また一般的でもある。

実固有値問題の支配方程式はつぎのように表わされる。

$$(\mathbf{K} - \lambda_m \mathbf{M}) \boldsymbol{\varphi}_m = 0 \quad (3-50)$$

ここで、 \mathbf{K} 、 \mathbf{M} はそれぞれ剛性行列、質量行列であり、 λ_m 、 $\boldsymbol{\varphi}_m$ はそれぞれ第 m 次モードの固有値と固有ベクトルである。式(3-50)の両辺に左から $\boldsymbol{\varphi}_m^T$ をかけて、設計変数

x で偏微分すると、次式が得られる。

$$2 \frac{\partial \varphi_m^T}{\partial x} (\mathbf{K} - \lambda_m \mathbf{M}) \varphi_m + \varphi_m^T \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{K} - \lambda_m \mathbf{M}) \right\} \varphi_m = 0 \quad (3-51)$$

式(3-51)の第1項に式(3-50)を代入すると、式(3-51)は次のように変形される。

$$\varphi_m^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x} - \lambda_m \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \right) \varphi_m - \frac{\partial \lambda_m}{\partial x} \varphi_m^T \mathbf{M} \varphi_m = 0 \quad (3-52)$$

したがって、固有値の一階導関数が次式のように求められる。

$$\frac{\partial \lambda_m}{\partial x} = \frac{1}{\varphi_m^T \mathbf{M} \varphi_m} \varphi_m^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x} - \lambda_m \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \right) \varphi_m \quad (3-53)$$

特に、固有ベクトルの正規化条件として、 \mathbf{M} -正規直交条件

$$\varphi_m^T \mathbf{M} \varphi_m = 1 \quad (3-54)$$

を採用した場合は、次式のようになる。

$$\frac{\partial \lambda_m}{\partial x} = \varphi_m^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x} - \lambda_m \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \right) \varphi_m \quad (3-55)$$

3-4 固有ベクトルの感度解析

固有ベクトルの感度係数の導出は、固有値のそれに比べて計算量を要するが、1968年に Fox 等によって発表された方法⁽⁴²⁾、1984年に井上等によって発表された方法⁽⁴³⁾などが有名である。

3-4-1 Fox 等の方法 (1)

Fox 等は二つの方法の提案を行なっている。ここではその一つについて説明する。まず、式(3-50)に示した実固有値問題の支配方程式の両辺を、設計変数 x で偏微分して次式を得る。

$$(\mathbf{K} - \lambda_m \mathbf{M}) \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} = - \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x} - \lambda_m \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} - \frac{\partial \lambda_m}{\partial x} \mathbf{M} \right) \varphi_m \quad (3-56)$$

ここで、 n 自由度をもつ行列 $(\mathbf{K} - \lambda_m \mathbf{M})$ は正則ではないため（ランクが $n-1$ ）、式(3-56)をこのまま固有ベクトルの感度係数 $\{\partial \varphi_m / \partial x\}$ について解くことはできない。そこで、式(3-54)の \mathbf{M} -正規直交条件を x で偏微分して得られる次式を導入する。

$$2 \varphi_m^T \mathbf{M} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} = - \varphi_m^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \varphi_m \quad (3-57)$$

式(3-56)は、式(3-57)と連立されることで、次式を得る。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} - \lambda_m \mathbf{M} \\ 2 \varphi_m^T \mathbf{M} \end{bmatrix} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x} - \lambda_m \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} - \frac{\partial \lambda_m}{\partial x} \mathbf{M} \\ \varphi_m^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \end{bmatrix} \varphi_m \quad (3-58)$$

$[(n+1) \times n] \quad [n \times 1] \quad \quad \quad [(n+1) \times n] \quad [n \times 1]$

式(3-58)の両辺の係数行列はいずれも $(n+1) \times n$ 行列であるので、前から $n \times (n+1)$ 行列

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} - \lambda_m \mathbf{M} \\ 2 \varphi_m^T \mathbf{M} \end{bmatrix}^T$$

をかけることで次のような正方行列となる。

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= (\mathbf{K} - \lambda_m \mathbf{M})(\mathbf{K} - \lambda_m \mathbf{M}) + 2 \mathbf{M} \varphi_m \varphi_m^T \\ &\equiv \mathbf{C}_L \end{aligned} \quad (3-59a)$$

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= (\mathbf{K} - \lambda_m \mathbf{M}) \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x} - \lambda_m \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} - \frac{\partial \lambda_m}{\partial x} \mathbf{M} \right) + \mathbf{M} \varphi_m \varphi_m^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \\ &\equiv \mathbf{C}_R \end{aligned} \quad (3-59b)$$

得られる式を簡略化すると次のように表わされる。

$$\frac{\partial \phi_m}{\partial x} = -\mathbf{C}_L^{-1} \mathbf{C}_R \phi_m \quad (3-60)$$

式(3-60)の左辺の係数行列は正則なので、固有ベクトルの感度係数 $\{\partial \phi_m / \partial x\}$ についての連立一次方程式として解くことができる。

3-4-2 Fox 等の方法 (2)

Fox 等が提案しているもう一つの方法は次の通りである。 n 自由度系の n 本の固有ベクトルはすべて直交しているため、 n 次元のどのようなベクトルでもそれらの線形結合として表わすことができる。したがって、第 m 次の固有ベクトルの感度係数 $\{\partial \phi_m / \partial x\}$ は、次のような形で表わされる。

$$\frac{\partial \phi_m}{\partial x} = \sum_{j=1}^n a_{mj} \phi_j \quad (3-61)$$

ここで、 a_{mj} は線形結合の重み係数である。この係数が求められれば、式(3-61)に代入することによって感度係数が得られる。まず、式(3-61)を式(3-56)に代入すると次式を得る。

$$(\mathbf{K} - \lambda_m \mathbf{M}) \sum_{j=1}^n a_{mj} \phi_j = - \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x} - \lambda_m \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} - \frac{\partial \lambda_m}{\partial x} \mathbf{M} \right) \phi_m \quad (3-62)$$

式(2-2-7)の両辺に、左から第 i 次の固有ベクトルをかけると次式を得る。

$$\sum_{j=1}^n a_{mj} \phi_i^T (\mathbf{K} - \lambda_m \mathbf{M}) \phi_j = - \phi_i^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x} - \lambda_m \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} - \frac{\partial \lambda_m}{\partial x} \mathbf{M} \right) \phi_m \quad (3-63)$$

ここで、 $i \neq m$ の場合は、 M -直交条件および K -直交条件、すなわち

$$\phi_i^T \mathbf{M} \phi_m = 0 \quad (3-64)$$

$$\phi_i^T \mathbf{K} \phi_m = 0 \quad (3-65)$$

を式(3-62)に代入することより次式を得る。

$$a_{mi} = \frac{\phi_i^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x} - \lambda_m \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \right) \phi_m}{\lambda_m - \lambda_i} \quad i \neq m \quad (3-66)$$

また、 $i = m$ の場合は、まず式(3-61)を式(3-57)に代入して次式を得る。

$$2 \phi_m^T \mathbf{M} \sum_{j=1}^n a_{mj} \phi_j = - \phi_m^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \phi_m \quad (3-67)$$

式(3-67)の左辺に M -直交条件を適用することにより、次式を得る。

$$a_{mm} = -\frac{1}{2} \phi_m^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \phi_m \quad (3-68)$$

3-4-3 井上等の方法 (拘束点法)

井上等は、式(3-56)に M -正規直交条件を連立させるのではなく、感度ベクトル $\{\partial \phi_m / \partial x\}$ のある成分を 0 と置き、その単点拘束条件のもとで、右辺を疑似荷重ベクトルとした静的な剛性方程式として式(3-56)を解く方法を提案した。たとえば、実固有値方程式を解いて固有ベクトルを求める場合、正規化を次の条件によって行なったとする。

$$\max (\phi_{1m}, \phi_{2m}, \dots, \phi_{nm}) = 1 \quad (3-69)$$

ここで、たとえば ϕ_{1m} は第 m 次モードベクトルの第 1 成分である。このとき、最大成分を ϕ_{nm} とすると $\{\partial \phi_{nm} / \partial x\}$ を 0 と置くのである。式(3-56)の係数行列のランクは $n-1$ であるが、式(3-69)の条件を導入することにより自由度も $n-1$ となり、特異性は除去される。固有モードベクトルの正規化の方法として式(3-69)を採用することで、一般性はまったく失われない。さらに付け加えれば、拘束する点は必ずしも最大成分をもつ点である必要はなく、任意の点でよい。ただし、その成分が 0 でない点に限る。この手法はその手順の特徴から「拘束点法」とも称される。

3-4-4 各方法の比較

上述した三つの固有ベクトル感度の計算法の特徴を述べる。

① Fox 等の方法 (1) では、式(3-59a)および式(3-59b)で表わされる係数行列が帯状で

なくなるという欠点が挙げられる。この方法は理論的にはエレガントであるが、実用に耐えうる、ある程度以上詳細な有限要素モデルについての計算を行なう場合には計算効率の観点から不利である。

② Fox 等の方法 (2) では、式(3-61)において全モードベクトルの線形結合で感度ベクトルを表わしているが、実際にはすべての固有ベクトルを算出することは計算時間がかかりすぎる。したがって、必要なだけの固有ベクトルを用いて、近似的に式(3-61)を求めることが要求される。しかし、どのモードを選べば少数でも近似度が高くなるかについては情報が得られない。この方法も実際問題への適用は困難であると言わざるをえない。

③ 拘束点法は Fox 等による二つの方法に比べて現実的である。係数行列の操作は一切無いので、もとの帯性が保持される。このため、必要なメモリや計算時間が、一つのモードについて同じ自由度の静解析を実行するのと同程度でよいことになる。

以上より、OPTSYS ではプログラミングの簡便さ、計算負荷の低さから拘束点法を採用した。

3-4-5 異なる方法で正規化された感度ベクトル間の変換法

拘束点法において、式(3-56)を拘束する点としてその固有ベクトルが最大成分をもつ自由度を選んだ時に得られる感度係数は、言うまでもなく最大成分を 1 として正規化された固有ベクトルに対する導関数である。しかし、この操作は、正規化の方法として最大成分を 1 とするかモード質量を 1 とするかには無関係に実行される。したがって、実固有値解析の段階で固有ベクトルがモード質量を 1 として計算された場合、その感度を算出するためには、拘束点法によって算出された固有ベクトルに変換を加える必要が生じる。ここでは、最大成分を 1 として正規化された固有ベクトルの感度を、モード質量を 1 として正規化された固有ベクトルの感度へ変換する方法を述べる。

最大成分を 1 として正規化された固有ベクトルを φ_{\max} 、モード質量を 1 として正規化された固有ベクトルを φ_{mass} とすると、次の二つの式が成立する。

$$\varphi_{\max}^T \mathbf{M} \varphi_{\max} = m_{\max} \quad (3-70)$$

$$\varphi_{\text{mass}}^T \mathbf{M} \varphi_{\text{mass}} = 1 \quad (3-71)$$

ここで m_{\max} は、最大成分を 1 とした場合のモード質量である。 φ_{\max} と φ_{mass} の間には次の関係がある。

$$\varphi_{\text{mass}} = \alpha \varphi_{\max} \quad (3-72)$$

ここで α は比例定数である。式(3-72)を式(3-71)に代入すると次式を得る。

$$\alpha^2 \varphi_{\max}^T \mathbf{M} \varphi_{\max} = 1 \quad (3-73)$$

式(3-73)と式(3-70)から次の関係を得る。

$$\alpha = (m_{\max})^{-1/2} \quad (3-74)$$

次に、式(3-72)を設計変数 x で偏微分して次式を得る。

$$\frac{\partial \varphi_{\text{mass}}}{\partial x} = \alpha \frac{\partial \varphi_{\max}}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial x} \varphi_{\max} \quad (3-75)$$

また、式(3-74)を設計変数 x で偏微分して次式を得る。

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = -\frac{1}{2} (m_{\max})^{-3/2} \frac{\partial \varphi_{\max}}{\partial x} \quad (3-76)$$

さらに、式(3-70)を設計変数 x で偏微分して次式を得る。

$$\frac{\partial \varphi_{\max}}{\partial x} = 2 \varphi_{\max}^T \mathbf{M} \frac{\partial \varphi_{\max}}{\partial x} + \varphi_{\max}^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \varphi_{\max} \quad (3-77)$$

式(3-77)を式(3-76)に代入して次式を得る。

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = -\frac{1}{2} (m_{\max})^{-3/2} \left(2 \varphi_{\max}^T \mathbf{M} \frac{\partial \varphi_{\max}}{\partial x} + \varphi_{\max}^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \varphi_{\max} \right) \quad (3-78)$$

式(3-78)を式(3-75)に代入することにより、モード質量を 1 として正規化した固有ベクトルの感度は、以下のように求められる。

$$\frac{\partial \varphi_{\max}}{\partial x} = (m_{\max})^{-1/2} \frac{\partial \varphi_{\max}}{\partial x} - \frac{(m_{\max})^{-3/2}}{2} \left(2 \varphi_{\max}^T \mathbf{M} \frac{\partial \varphi_{\max}}{\partial x} + \varphi_{\max}^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \varphi_{\max} \right) \varphi_{\max} \quad (3-79)$$

3-5 ゼロ固有値が存在する場合の感度係数の算出法

機械構造物の実固有解析では、必ずしもその構造物がどこかに固定された状態ばかりが取り扱われるわけではない。非常に弱いばねで吊り下げられた構造物の振動解析や、あるいは部分構造剛性法⁽⁴⁴⁾を適用して各部分構造別に実固有値解析が実行されるような場合などには、その問題の解としてゼロ固有値が存在することを考慮しなければならない。OPTSYS でこのような問題にも対応するためには、その感度係数がいかにして求められるかを明らかにしておく必要がある。

実固有値問題の解がゼロ固有値をもつ場合、たとえば構造系の問題では剛体モードが存在する場合は、次のように、シフトと称される操作を行うことにより解が求められることが知られている⁽⁴⁵⁾。まずその手順を示す。

再び実固有値問題の支配方程式を示す。

$$(\mathbf{K} - \lambda_m \mathbf{M}) \varphi_m = 0 \quad (3-80)$$

式(3-80)を次のように変形する。

$$(\bar{\mathbf{K}} - \bar{\lambda}_m \mathbf{M}) \varphi_m = 0 \quad (3-81)$$

ここで、

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K} - \mu_m \mathbf{M} \quad (3-82)$$

$$\bar{\lambda}_m = \lambda_m - \mu_m \quad (3-83)$$

式(3-81) が式(3-80) と等価であるということの意味は、新しい剛性行列 $\bar{\mathbf{K}}$ と元の質量行列 \mathbf{M} とから構成される実固有値問題の解が、固有値 $\lambda_m - \mu_m$ 、固有ベクトル φ_m であるということである。すなわち、式(3-80)で表わされる原問題の解に対して、固有ベクトルに関しては全く変わらず、固有値が μ_m だけ小さくなる。式(3-82)のシフト操作により、元の剛性行列 \mathbf{K} の有していた特異性は除かれるため、サブスペース法などの通常の固有値解法でも式(3-82)を解くことができる。適切なシフトの量は問題により異なるが、以下の条件を満足し、かつゼロ固有値でない最低次の固有値の大きさと同程度でよいと考えられる。

$$\mu_m < 0 \quad (3-84)$$

以上で、ゼロ固有値が存在する場合にも通常の計算手段を用いて解が求められることがわかった。次に、シフトによって得られた剛性行列 $\bar{\mathbf{K}}$ を用いた式(3-81)から、固有値と固有ベクトルの感度を求める。まず固有値の感度に関しては、3-3節で導いた式(3-55)を適用して次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\lambda}_m}{\partial x} &= \varphi_m^T \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{K}}}{\partial x} - \bar{\lambda}_m \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \right) \varphi_m \\ &= \varphi_m^T \left\{ \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x} - \mu_m \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} - (\lambda_m - \mu_m) \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \right\} \varphi_m \\ &= \varphi_m^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x} - \lambda_m \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \right) \varphi_m \\ &= \frac{\partial \lambda_m}{\partial x} \end{aligned} \quad (3-85)$$

したがって、シフト後の固有ベクトルの感度は、シフトをしない場合と全く変化がないことが導かれた。次に固有ベクトルの感度に関しては、3-4-3項で述べた拘束点法を適用することにより、式(3-56)にシフトをかけた剛性行列 $\bar{\mathbf{K}}$ を代入して得られる次式を、単点拘束条件のもとに解くことになる。

$$(\bar{\mathbf{K}} - \bar{\lambda}_m \mathbf{M}) \frac{\partial \bar{\varphi}_m}{\partial x} = - \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{K}}}{\partial x} - \bar{\lambda}_m \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\lambda}_m}{\partial x} \mathbf{M} \right) \varphi_m \quad (3-86)$$

ここで、式(3-85)の左辺は、

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \{(\mathbf{K} - \mu_m \mathbf{M}) - (\lambda_m - \mu_m) \mathbf{M}\} \frac{\partial \bar{\varphi}_m}{\partial x} \\ &= (\mathbf{K} - \lambda_m \mathbf{M}) \frac{\partial \bar{\varphi}_m}{\partial x} \end{aligned} \quad (3-87)$$

また右辺は、

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= \left\{ \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x} - \mu_m \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} - (\lambda_m - \mu_m) \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\lambda}_m}{\partial x} \mathbf{M} \right\} \varphi_m \\ &= \left\{ \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x} - \lambda_m \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} - \frac{\partial \lambda_m}{\partial x} \mathbf{M} \right\} \varphi_m \end{aligned} \quad (3-88)$$

となる。式(3-87)と式(3-88)を式(3-86)に代入して次式を得る。

$$(\mathbf{K} - \lambda_m \mathbf{M}) \frac{\partial \bar{\varphi}_m}{\partial x} = - \left\{ \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x} - \lambda_m \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} - \frac{\partial \lambda_m}{\partial x} \mathbf{M} \right\} \varphi_m \quad (3-89)$$

式(3-89)を式(3-56)と比較すると、シフト後の剛性行列 $\bar{\mathbf{K}}$ を用いて求められた固有ベクトルの感度は、固有値の場合とまったく同様に原問題のそれに等しいことがわかる。

3-6 周波数応答伝達関数の感度解析

前節までで、実固有値解析における固有値と固有ベクトルの感度計算についての議論が終了した。本節ではそれらを踏まえて周波数応答伝達関数の感度係数の算出を行う。

比例粘性減衰系のイナータンス伝達関数行列 $\mathbf{R}(\omega)$ は次式で表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\omega) &= \sum_{m=1}^N \left[\frac{[r_m]}{1 - (\omega/\omega_m)^2 - 2j \zeta_m (\omega/\omega_m)} \right] \\ &= \sum_{m=1}^N \left[\frac{1 - (\omega/\omega_m)^2 - 2j \zeta_m (\omega/\omega_m)}{C_0} [r_m] \right] \\ &= \mathbf{R}_r(\omega) + j \mathbf{R}_i(\omega) \end{aligned} \quad (3-90)$$

ここで、

$$[r_m] = \frac{\varphi_m \varphi_m^T}{\varphi_m^T \mathbf{M} \varphi_m} \quad (3-91)$$

$$\mathbf{R}_r(\omega) = \sum_{m=1}^N \left[\frac{1 - (\omega/\omega_m)^2}{C_0} [r_m] \right] \quad (3-92)$$

$$\mathbf{R}_i(\omega) = \sum_{m=1}^N \left[\frac{2 \zeta_m \omega/\omega_m}{C_0} [r_m] \right] \quad (3-93)$$

$$C_0 = \left\{ 1 - (\omega/\omega_m)^2 \right\}^2 + 4 \zeta_m^2 (\omega/\omega_m)^2 \quad (3-94)$$

ここで N は全モード数、 ω_m 、 ζ_m はそれぞれ m 次の固有振動数、減衰比であり、 j は虚数単位である。 $[r_m]$ はレジデュールと呼ばれ、伝達関数 $\mathbf{R}(\omega)$ と同じ次元を有する量である。また、 $\mathbf{R}_r(\omega)$ と $\mathbf{R}_i(\omega)$ はそれぞれイナータンス伝達関数行列の実部と虚部である。レジデュールはリセプタンス伝達関数におけるモーダルフレキシビリティ⁽⁴⁶⁾と同様の意味をもつ。第 m 次モードのレジデュール $[r_m]$ とモーダルフレキシビリティ $[f_m]$ の間には、次の関係が成立する。

$$[r_m] = \omega_m^2 [f_m] \quad (3-95)$$

さて、設計変数に関するイナータンス伝達関数行列の感度係数を求めるために、まずレジデュールの感度を求める。

$$\begin{aligned} \frac{\partial [r_m]}{\partial x} &= \frac{1}{m_m} \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x} \varphi_m^T + \varphi_m \frac{\partial \varphi_m^T}{\partial x} \right) \\ &\quad + \frac{\varphi_m \varphi_m^T}{m_m^2} \left(2 \frac{\partial \varphi_m^T}{\partial x} \mathbf{M} \varphi_m + \varphi_m^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \varphi_m \right) \end{aligned} \quad (3-96)$$

ここで、

$$m_m = \varphi_m^T \mathbf{M} \varphi_m \quad (3-97)$$

次に、上のレジデューの感度を用いて伝達関数の感度を求める。イナータンス伝達関数には構造物の剛性行列と質量行列のみならず、その減衰比が大きく影響を及ぼす。しかし減衰比は、実際の構造物においては各固有モードの間でさほど大きな相違がなく、また設計変更によっても大きくは変化しない場合が多い。したがって、OPTSYS では伝達関数の感度計算において、減衰比は一定であるとした。その条件のもとで、伝達関数の感度は、実部と虚部のそれぞれに対して以下のように表される。

$$\frac{\partial \mathbf{R}_r(\omega)}{\partial x} = \sum_{m=1}^N \frac{1}{C_0} \left\{ \left\{ 1 - (\omega/\omega_m)^2 \right\} \frac{\partial [r_m]}{\partial x} - \frac{2\omega_m}{\omega^2} \frac{\partial \omega_m}{\partial x} \left\{ 1 - \frac{1 - (\omega/\omega_m)^2}{C_0} C_1 \right\} [r_m] \right\} \quad (3-98)$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_i(\omega)}{\partial x} = \sum_{m=1}^N \frac{2\zeta_m}{C_0 \omega} \left\{ \omega_m \frac{\partial [r_m]}{\partial x} + \frac{\partial \omega_m}{\partial x} \left\{ 1 - \frac{2\omega_m^2 C_1}{C_0 \omega} \right\} [r_m] \right\} \quad (3-99)$$

ここで、

$$C_1 = 2 \left\{ 1 - (\omega/\omega_m)^2 \right\} - 4\zeta_m^2 \quad (3-100)$$

3-7 加速度応答レベルの感度解析

前節では、イナータンス伝達関数の実部と虚部のそれぞれについて独立に感度係数を求めた。しかし、実際に機械構造物の振動が問題となる場合には、具体的な加振力が与えられた時に発生する構造物各部の加速度応答のレベル（振幅）を低減することが要求される。以下では、加速度応答レベルの感度係数の算出法を述べる。

加速度応答ベクトルはイナータンス伝達関数 $\mathbf{R}(\omega)$ から次式で計算される。

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}(\omega) \mathbf{F} \quad (3-101)$$

ここで \mathbf{A} は加速度応答ベクトル、 \mathbf{F} は加振力ベクトルである。また \mathbf{A} は、次のように実部と虚部に分解することができる。

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_r + j \mathbf{A}_i \quad (3-102)$$

したがって、加速度応答ベクトルの絶対値は次のように表される。

$$|\mathbf{A}| = \left(\mathbf{A}_r^T \mathbf{A}_r + \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_i \right)^{1/2} \quad (3-103)$$

ここで、

$$\mathbf{A}_r = \mathbf{R}_r(\omega) \mathbf{F} \quad (3-104)$$

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{R}_i(\omega) \mathbf{F} \quad (3-105)$$

式(3-103)、式(3-104)および式(3-105)を設計変数 x で偏微分することによって次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial |\mathbf{A}|}{\partial x} &= \frac{1}{2|\mathbf{A}|} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{A}_r^T \mathbf{A}_r) + \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_i) \right\} \\ &= \frac{1}{|\mathbf{A}|} \left(\mathbf{A}_r^T \frac{\partial \mathbf{A}_r}{\partial x} + \mathbf{A}_i^T \frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (3-106)$$

ここで、

$$\frac{\partial \mathbf{A}_r}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{R}_r(\omega)}{\partial x} \mathbf{F} \quad (3-107)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{R}_i(\omega)}{\partial x} \mathbf{F} \quad (3-108)$$

であることより、加速度応答ベクトルの絶対値の感度は、式(3-106)に式(3-107)と式(3-108)を代入して次のように導かれる。

$$\frac{\partial |\mathbf{A}|}{\partial x} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \left(\mathbf{A}_r^T \frac{\partial \mathbf{R}_r(\omega)}{\partial x} + \mathbf{A}_i^T \frac{\partial \mathbf{R}_i(\omega)}{\partial x} \right) \mathbf{F} \quad (3-109)$$

3-8 結言

本章では、OPTSYS で採用した静的および動的な感度解析の手続きについて述べた。それらをまとめると以下になる。

(1) 感度解析の効率は最適設計の計算全体の効率へ強く影響するため、OPTSYS では静的、動的のいずれの感度解析についても数値差分法ではなく解析的アプローチを採用した。

(2) 次に、はり要素の要素剛性行列について断面特性および要素構成節点座標に関する感度を求めた。また、具体的な断面形状として、円管の直径と肉厚についての感度を求めた。

(3) その剛性行列の感度を用いて、静的な変位の感度係数の算出法を示した。また、フレーム構造物の質量の感度係数も同様に解析的な方法で求められることを示した。

(4) さらに、実固有値問題における固有値と固有ベクトルに関して感度を求めた。特に固有ベクトルの感度算出については、三つの代表的な手法のうち拘束点法を選択した理由、異なる正規化の方法によって得られた解の相互変換法などについて述べた。

(5) 固有値と固有ベクトルの感度に基づいて比例粘性減衰系のイナータンス伝達関数行列の感度を求めた。また、実際の振動対策において問題となる加速度振幅の感度を求めた。

第4章 静的問題における最適構造設計

4-1 緒言

構造物に要求される多くの特性のうち、その質量、静剛性などの静的特性は最も基本的なものの一つである。あらゆる構造物は何らかの形で静的な荷重を受けなければならず、また機械構造物の実稼働状態で要求される動的特性の評価にあたっても、その静的特性は多くの場合重要な役割を演ずる。したがって、構造物の最適設計を行なう場合にも、その静的特性がまず最初に検討されるべきである。

ここで、問題をフレーム構造物の設計に限定してみると、設計者の仕事は、与えられた諸条件のもとで部材断面の寸法や部材の配置を決定することである。第1章でも述べたように、これまでにフレーム構造の最適設計問題が、部材断面寸法のみならず部材の配置をも設計変数として解かれた例は少ない。しかし、部材配置を設計変数にとれば部材断面寸法だけの場合よりも設計の自由度数が増し、それだけ初期設計から大幅な構造特性の改善が期待できる。そこで本章では、自動二輪車（以下、二輪車）の車体設計を例として、フレーム構造物の部材断面寸法と部材を構成する節点座標値を設計変数とした静的な最適設計についての議論を行なう。

近年の二輪車の車体設計においては、有限要素法による剛性・強度・振動解析はほとんどの機種について適用されるようになってきた⁽¹⁾。実機データとのつきあわせによる有限要素モデルの同定技術の適用が図られた結果、解析精度も向上してきた⁽⁵¹⁾。しかし、それらの解析によって得られた情報から、どのようにして良い設計諸元を見いだすかというシンセシス手法の確立に関してはいまだ手付かずの状態で、依然として経験的な類推に依存しているのが実状である。

二輪車の車体の多くはフレーム構造をもっている。近年ではシェル構造をもつものも増えてきつつあるが、フレーム構造は、製造コストの低さや設計経験の豊富さの点で、いまだ優位性をもつと言ってよい。しかし近年の製品の高性能化および高品位化とともに、設計に対する要求は次第に厳しさを増しつつある。そのような状況のなかで、経験に依存する従来の設計手順では、現在の高い要求水準に到達することは困難である。

第6章でも述べるように、二輪車の直進安定性はフレームのねじりの静コンプライアンス（静ねじり剛性の逆数）に強く依存する。このため、ねじりの静コンプライアンスに関する設計要求を満たすことは、数多くある要求のうちでも最も優先度の高い問題で

ある。本章ではまず、4-2節において設計対象とする自動二輪車のフレームとその有限要素モデルを提示する。そして、4-3節でねじりの静コンプライアンスを制約条件とした質量最小化設計を定式化し、断面寸法のみを設計変数として最適化を行なった場合の結果と、断面寸法だけでなく節点座標値も同時に設計変数とした場合の最適化結果とを比較する。さらに、4-5節ではこれとは問題設定を逆にして、4-3節で得られた最小質量を制約関数の上限値としたねじりの静コンプライアンス最小化設計を実行する。そして、質量最小化設計によって得られたフレーム形状と、静コンプライアンス最小化設計によって得られたフレーム形状を比較し、二つの異なる定式化が与える最適解についての考察を行なう。

4-2 二輪車の車体構造および設計に用いる構造モデル

図4-1に最も標準的な形式をもつ二輪車の側面図を示す。図中で濃く塗った部分が車体構造の中心となるフレームである。フレームにはエンジン、燃料タンク、シートなど

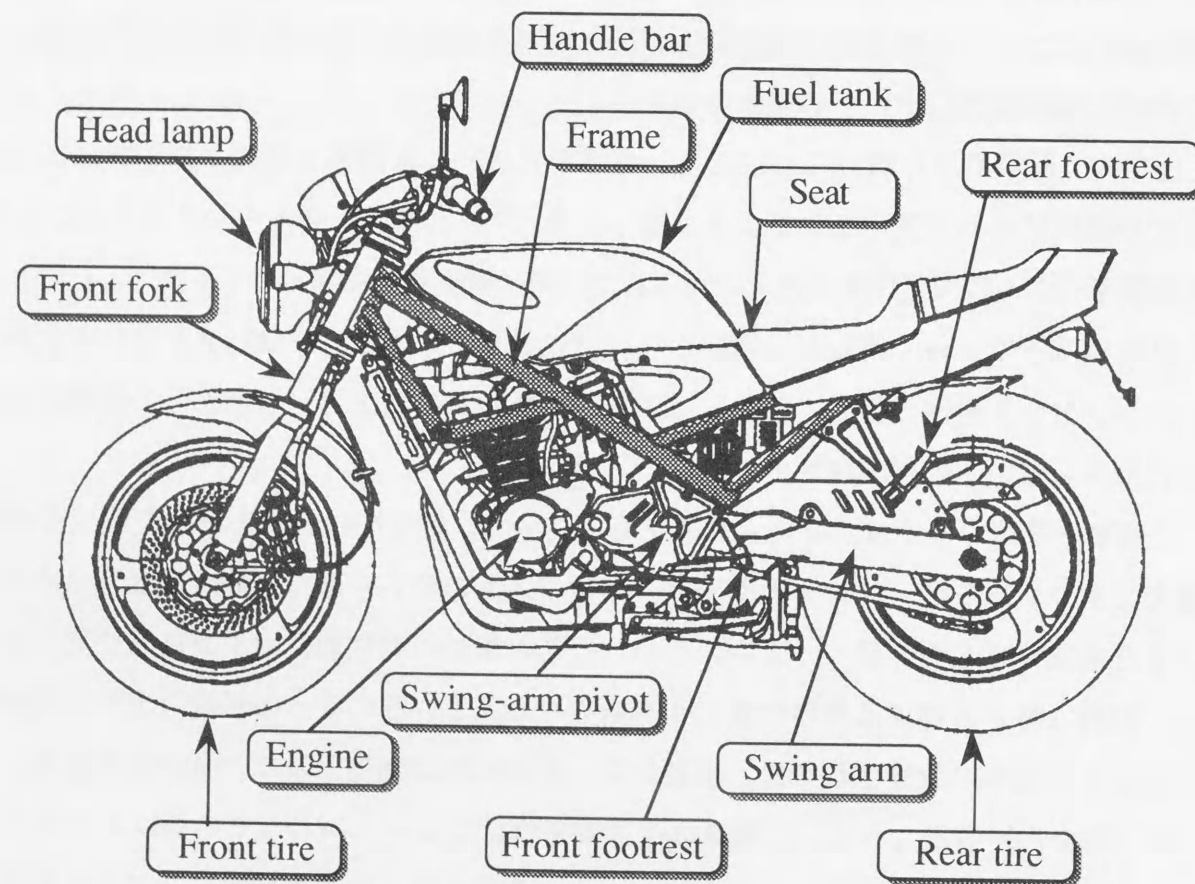


図4-1 二輪車の側面図と各部の名称

の主要部品が固定されている。フレーム前端上方へはベアリングを介してステアリングハンドルバーが取り付けられ、下方へはフロントフォークを経てフロントホイールとタイヤが取り付けられる。また、スイングアームピボットからは後方にスイングアームが伸び、その先端にリアホイールとタイヤが固定される。リアホイールは多くの機種でチェーン駆動されるが、大型のものでは四輪車と同様ドライブシャフトで駆動される場合もある。乗員は二人までが可能であり、このため後部乗員のためのフットレストも取り付けられている。

図4-2には本章で最適化の対象とした二輪車フレームを示す。このフレームの各部材はヘッドパイプを除いては角形断面をもつアルミニウム製のパイプで構成されている。図4-2のAの部分ヘッドパイプ、点Bはスイングアームピボットである。ヘッドパイプの上端からは、上述のようにベアリングを介してステアリングハンドルバーが取り付けられる。AからBに達する部材のうち、上部のものをアップチューブ、下部のものをダウンチューブと呼んでいる。また、シートを支える部材はシートレールと呼ばれ、それらの各部材を左右に連結する部材をブリッジと呼んでいる。

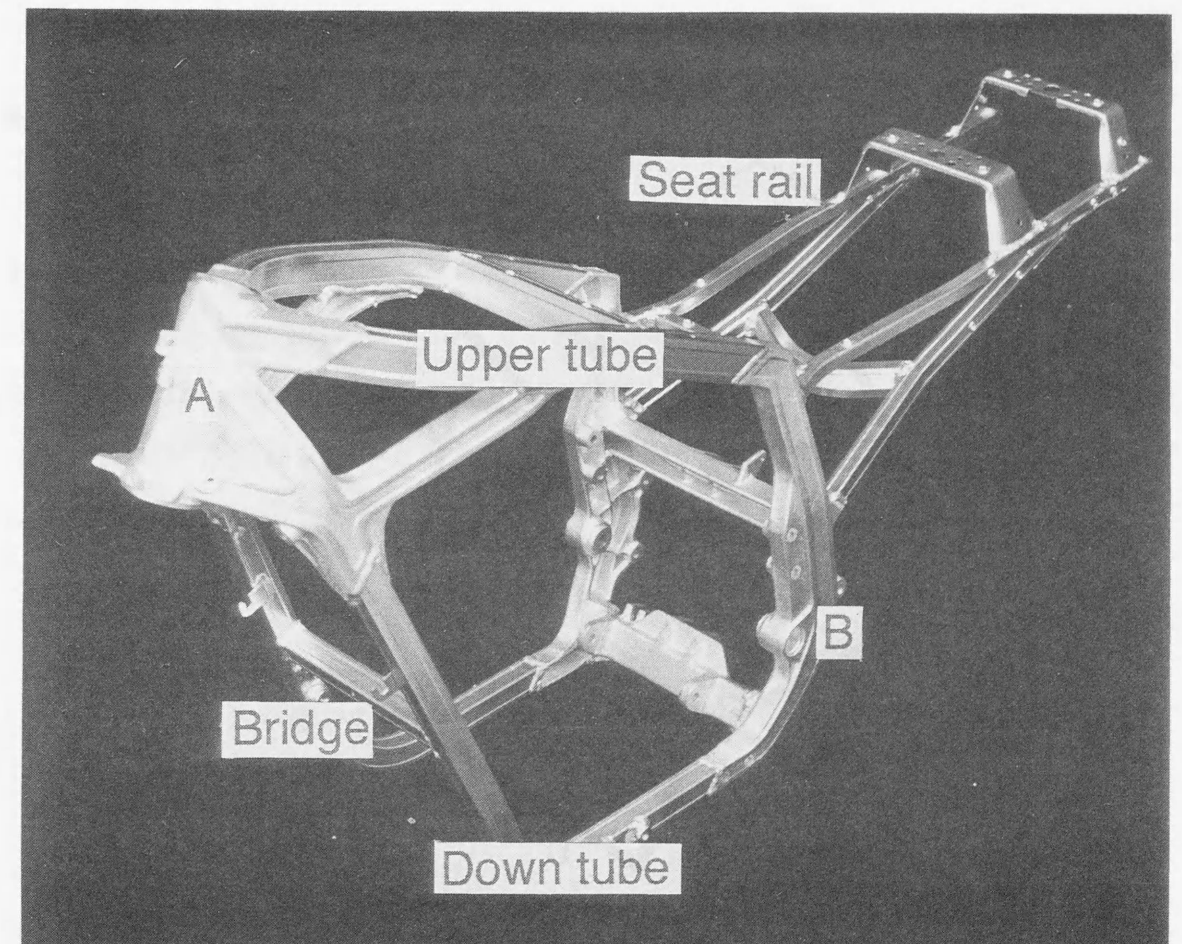


図4-2 静的な最適設計の対象とした二輪車フレーム

エンジンはフレームに懸架プレートを介して懸架される。図4-3にはエンジンが懸架されたフレームの有限要素モデルが示されている。このモデルは、すべて三次元梁要素で構成されており、点線で表わされているエンジンと、点C、D、E、Fの懸架プレートはそれぞれ等価剛性をもつ部材として抽象化されている。エンジンは、D、E、Fの各点では懸架プレートを介して直接フレームに懸架されるが、点Cにおいては、ゴム製のブッシュを介して軟らかく懸架される。フレームのねじり静コンプライアンスとは、図4-3に示されるように、スイングアームピボットを固定した状態でヘッドパイプにかけたねじりモーメントに対するねじり剛さの逆数を指し、次式で定義される。

$$S_t = \frac{\theta}{T L_t} \quad (4-1)$$

ここで、 S_t はねじり静コンプライアンス、 T はねじりモーメント、 θ は T がかけられた時の荷重点のねじれ角、そして L_t は左右のスイングアームピボットの midpoint からヘッドパイプ軸におろした垂線の長さである。

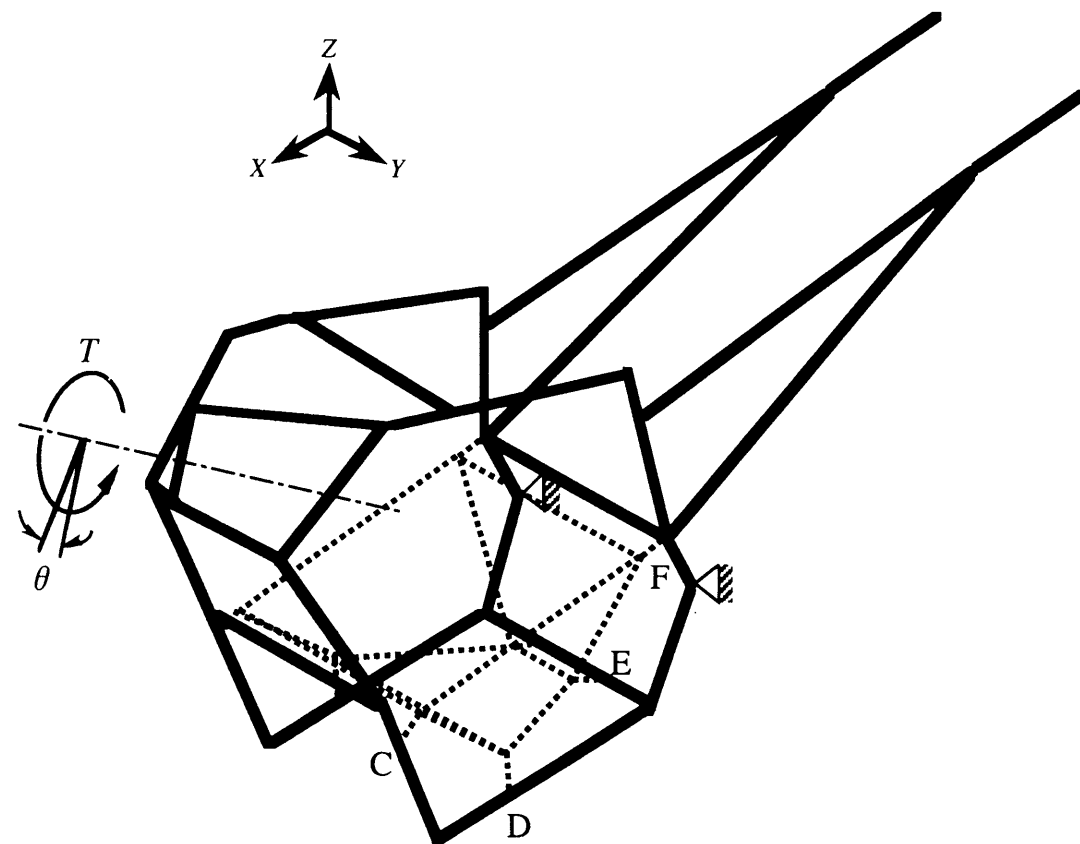
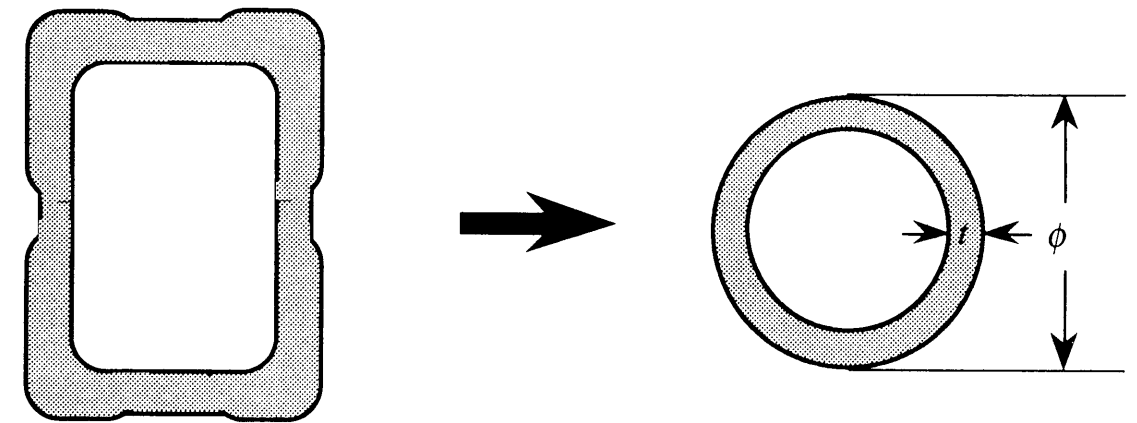


図4-3 二輪車フレームの有限要素モデル

また、オリジナルのフレームの部材断面は角型であるが、部材断面と部材配置を同時に最適化する際の計算労力を軽減するため、この最適化モデルの部材断面形状は、図4-4に示すようにすべて直径 ϕ と肉厚 t をもつ円管として近似した。



実際の部材断面形状

最適化モデルの部材断面形状

図4-4 部材断面形状の近似

4-3 質量最小化設計

4-3-1 質量最小化設計の定式化

本節では、ねじり静コンプライアンスが所期の値以下となるように制約条件を設定した上で、フレーム質量が最小となる設計を試みる。この場合、ねじり静コンプライアンスに関する条件は、所期の値を S_t^* とすると、次のように表わされる。

$$S_t - S_t^* \leq 0 \quad (4-2)$$

したがって、ねじり静コンプライアンスを制約条件とした質量最小化設計は、以下のように定式化される。

$$\left. \begin{array}{l} \text{目的関数：} M_f \rightarrow \min \\ \text{制約条件：} S_i - S_i^* \leq 0 \\ \quad \quad \quad x_i^L \leq x_i \leq x_i^U \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ \text{設計変数：} \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array} \right\} \quad (4-3)$$

4-3-2 断面寸法のみを設計変数とした設計

(1) 最適化条件および設計変数グループ

最初に、式(4-3)の定式化に従い、部材位置は初期モデルのまま部材断面寸法だけを設計変更して最適化を行なう。ここでは、ヘッドパイプ、エンジン等価部材、懸架プレート等価部材、および後部座席構造部材を除くすべての円管の直径 ϕ を、部材断面の代表寸法として最適化の設計変数に採用する。円管の肉厚 t は 2mm で一定とした。これは、静的な最適化では、たとえ肉厚を設計変数に採用しても、結果的に最適値は設定した下限値となることが明らかであるためである。また、このフレームは進行方向に対して左右対称の構造であるため、図4-5に示すように左右で対応する部材の直径は同じ設計変数として取り扱う。図中で、同じ設計変数グループに属する部材は同じパターンをもつ線で示されている。ここでは設計変数の総数は15である。設計変数の初期値はすべての部材に対して一律に 50mm を与え、その下限値 x_i^L はパイプ板厚が 2mm であることを考慮してすべて 4mm 、上限値 x_i^U は 200mm とした。

ねじり静コンプライアンスの制約値 S_i^* は、初期設計での値として、

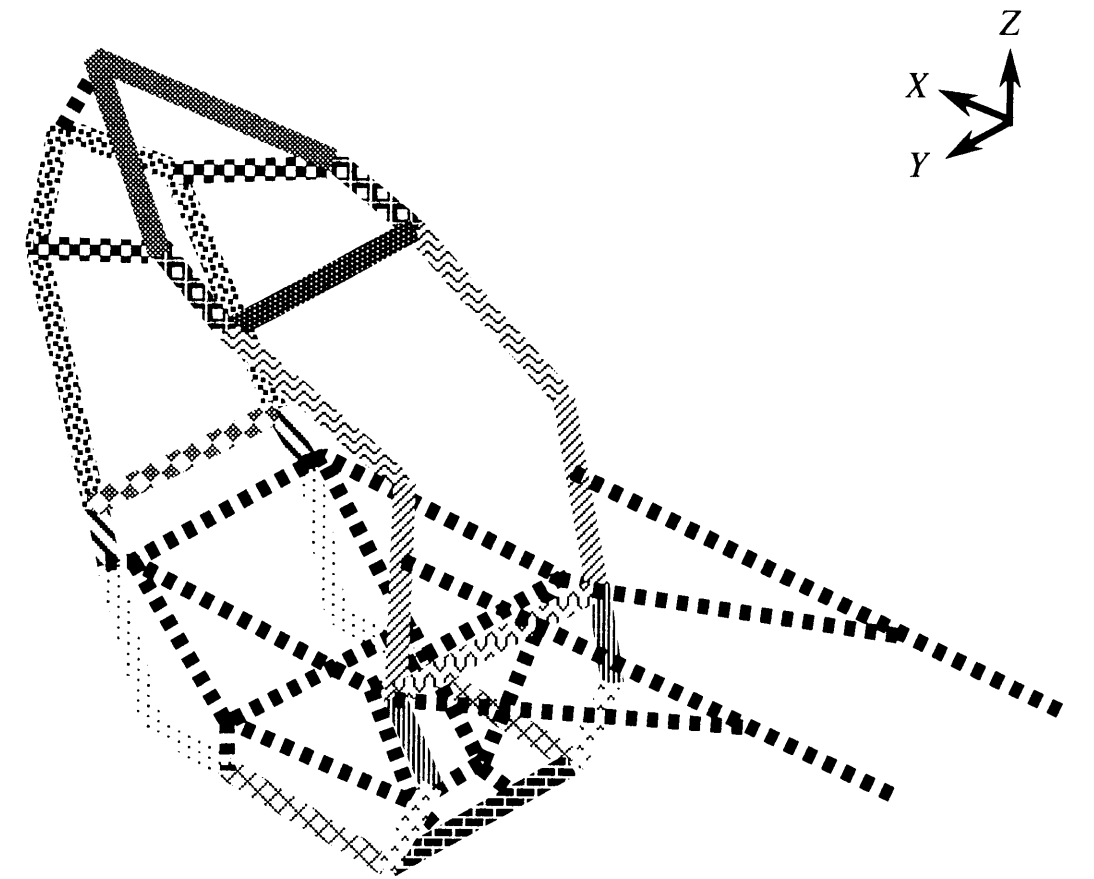
$$S_i^* = 8.34 \times 10^{-6} \text{ [rad/Nm}^2\text{]} \quad (4-4)$$

と定めた。ただし、通常の工学問題では制約値が厳密に与えられることは少なく、むしろその制約が多少破られることも考慮した定式化をした方が柔軟性があると考えられる。したがって、ここでは式(4-3)で与えられる最適化問題の制約条件を、次のように修正する。

$$S_i / S_i^* - 1 \leq \varepsilon \quad (4-5)$$

ここで ε は制約条件式のトレランスであり、実設計上の観点より次のように設定した。

$$\varepsilon = 0.03 \quad (4-6)$$



i	Design element number		Frozen element
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

図4-5 部材断面寸法最適化の設計変数グループ

(2) 最適化の結果

図4-6に示した初期設計に対して、可能方向法を用いた最適化を行なった結果、図4-7に示すような部材直径の分布が得られた。初期設計ではすべての部材が等しい直径を与えられていたのに対して、最適化後ではその分布が著しく変化していることがわかる。特に、部材6、7、8、12、13の直径は下限値である4mmにまで減少した。これらの図中では実線の幅は各部材直径に対応しており、一点鎖線はその部材直径が下限値であることを示す。また、破線は最適化対象外の部材を表わす。

目的関数であるフレーム質量は、初期設計での 6.52kg から 5.42kg まで17%減少した。また、最適化後のねじり静コンプライアンスは、 $8.57 \times 10^{-6} \text{ rad/Nm}^2$ である。この値は、式(4-6)で定められるトレランスにより、 S_i^* よりも約3%大きい。

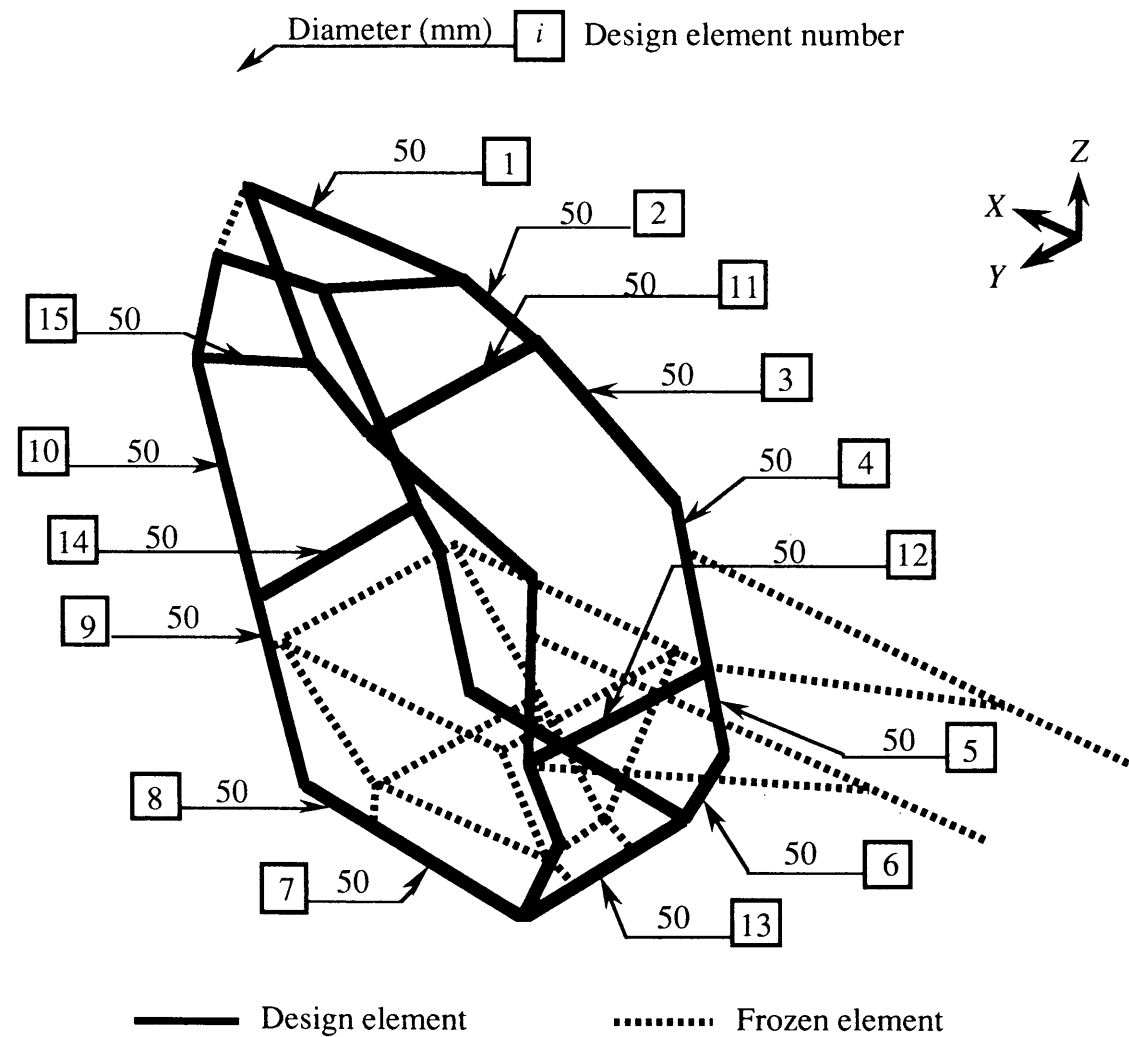


図4-6 初期設計における部材断面寸法

(3) 最適化結果の考察

最適化によってその直径が下限値まで減少した部材は、事実上消滅したと考えられる。それらの部材は、必要とされるねじり剛性を保持しながら、最小質量構造に到達するために、質量および剛性の再配分が行なわれた結果、最適構造にとって不必要とみなされたものである。どのような構造上の利点から、最適化によって図4-7に示されるような部材直径の分布が与えられたかを調べることは重要である。

まず、消滅した部材 6、7、8 は、エンジン前方上部の懸架点 C とその下部の懸架点 D、および固定点であるスイングアームピボットとを結んでいる。これらの部材は、ヘッドパイプに加えられた荷重を、懸架点 C あるいは D でエンジン構造へ通さずに、直接スイングアームピボットに伝達する経路上にある。すなわち、この部分の部材の剛性はエ

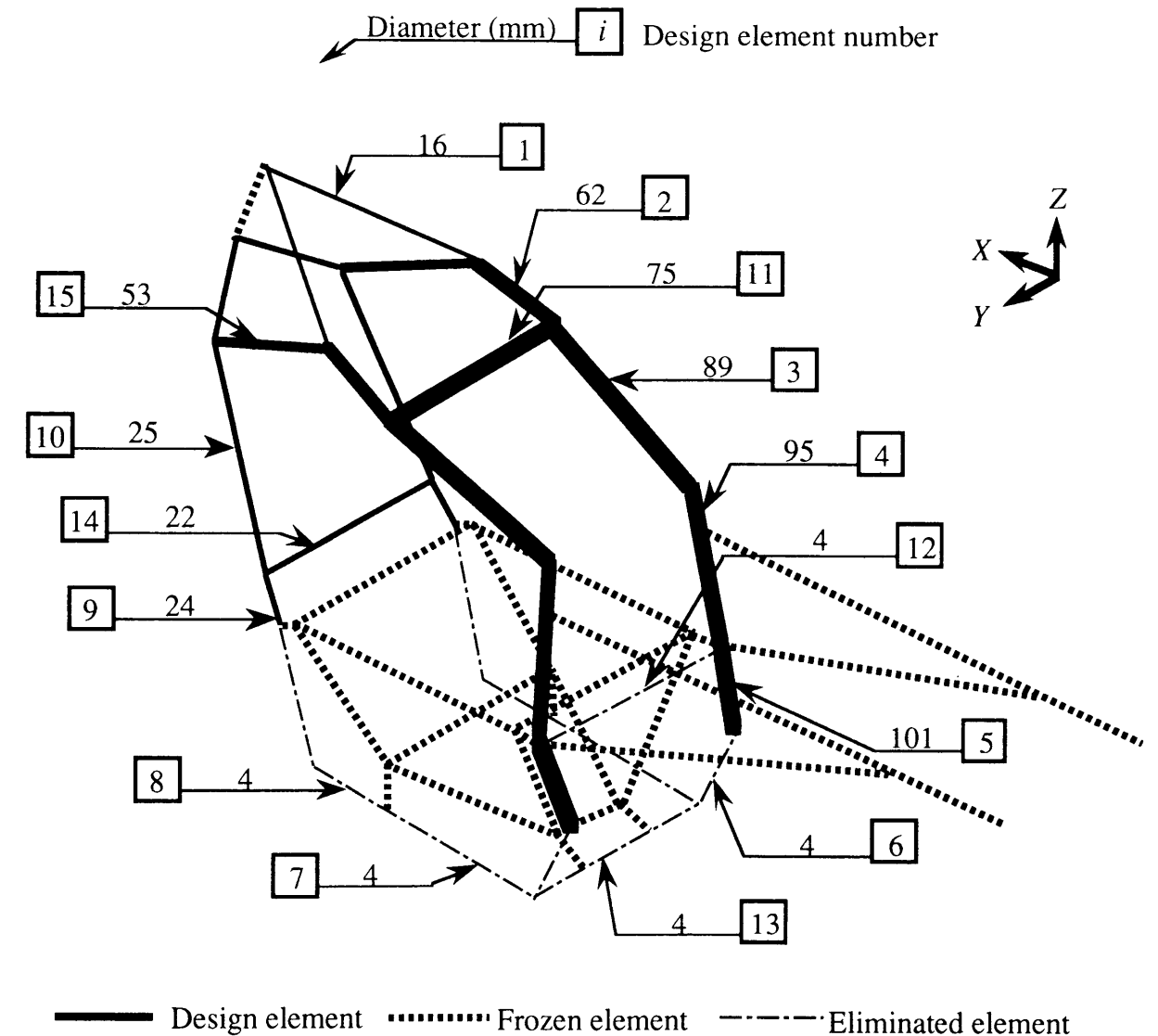


図4-7 部材断面寸法のみを設計変数とした質量最小化設計結果

エンジンの剛性と並列的である。それらが消滅したことは、この部分では、エンジンのみを通して行なわれる荷重の伝達が、より軽量のフレーム構造をもたらすことを意味している。これは、エンジンがその周辺のフレームの部材や懸架プレートに比較して、非常に剛性の高い構造物であることに起因すると考えられる。また、部材 13 は、消滅した部材 6、7 の左右を結んでいるブリッジであることから、やはり構造上不必要とみなされたものである。部材 12 が消滅したのは、それが固定されたスイングアームピボット、および剛い懸架点 F に近接しており、荷重伝達の意味からは不必要であるためと考えられる。

これとは逆に、ヘッドパイプの上端から懸架点 F を通ってスイングアームピボットに達する部材 1～5 およびそれらを連結するブリッジ部材 10 の直径はおおむね増加した。特に、ブリッジ 10 は、固定されたスイングアームピボットから遠く離れた位置で左右の長い部材を連結する重要な部材であるため、他のブリッジ部材と比較して直径が増加した。また、ヘッドパイプの下端から懸架点 C の間の部分では、エンジン懸架点の近傍に位置するにもかかわらずブリッジ部材 14 が消滅しなかった。これは、4-2 節で述べたように、エンジンは点 C でフレキシブルに懸架されているためであると考えられる。

以上の考察より、初期設計ではエンジンはフレームの下部構造の上に設置されていたのに対し、最適化の結果得られた構造においては、エンジンはフレームの上部構造から吊り下げられることがわかる。

4-3-3 断面寸法と節点座標を同時に設計変数とした設計

(1) 最適化条件および設計変数グループ

本項では、フレームの部材を最適に配置するために、設計変数として部材の直径だけでなく部材構成節点の座標値も同時に変更する最適化を行なう。最適化モデルは断面寸法のための最適化で用いたものをやや簡単化した。この結果、設計変更部材数は 13、設計変更される節点の数は 28 となった。このことは、ヘッドパイプ、スイングアームピボット、後部座席構造を除くすべての部材配置が三次元空間内で最適化されることを意味する。ただし、このフレームの有限要素モデルの XZ 面に関する対称性を考慮して、設計変数として感度計算を行なう節点は片側だけの 14 個とした。各節点の設計変更自由度は基本的に X、Y、Z の三自由度としたが、いくつかの節点については、エンジンを搭載するための空間的制約から X、Y 方向のみ、あるいは Y、Z 方向のみに限定した。図 4-8 に設計変更部材のグループ、および設計変更節点とその自由度を示した。

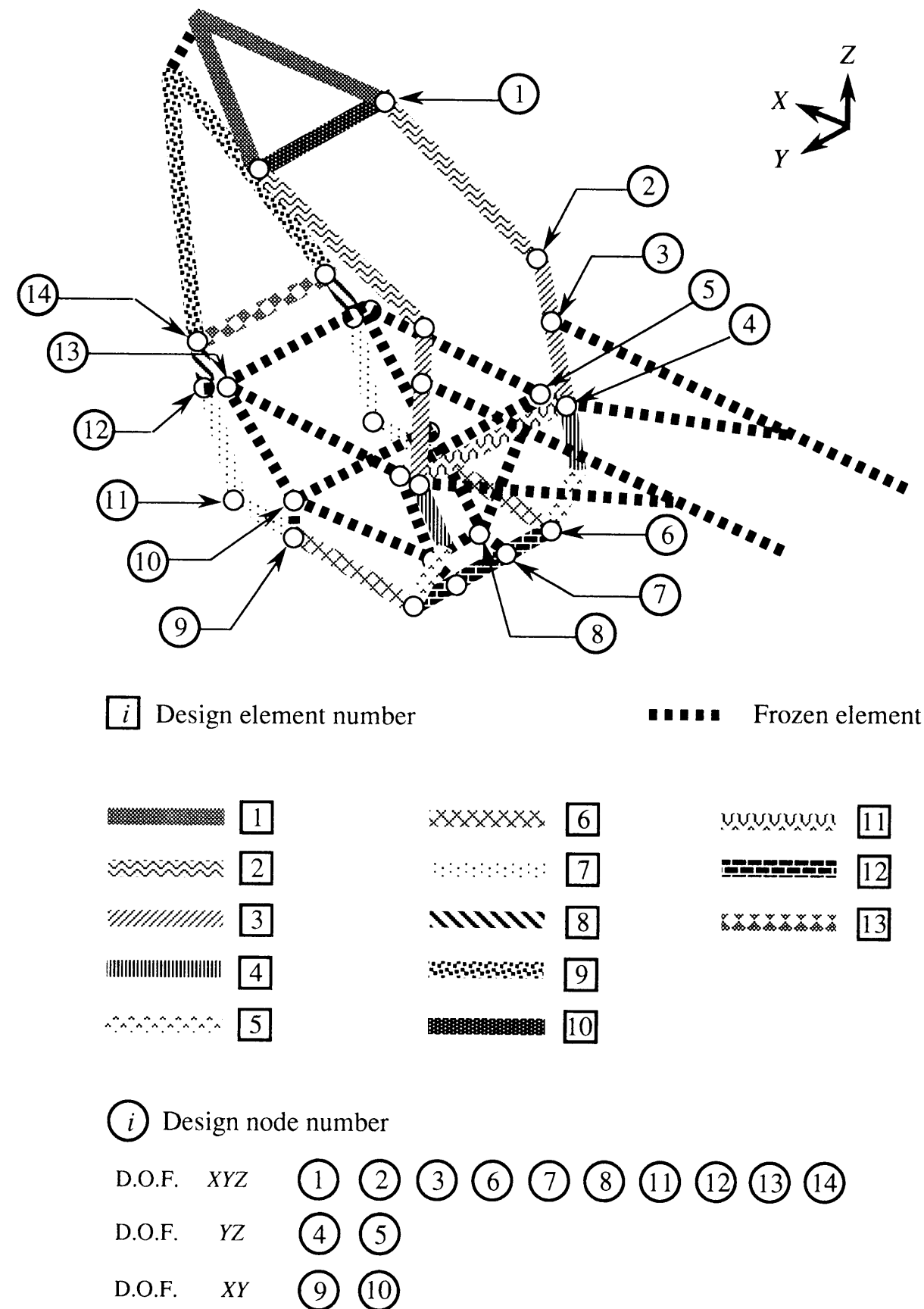


図 4-8 設計変更部材のグループ、および設計変更節点とその自由度

以上より設計変数の総数は51となった。また、モデルの簡単化にともない、初期設計における質量を断面寸法のみ最適化とほぼ等しくするため、部材初期寸法として一律に60mmを与えた。この変更により、初期設計におけるフレームの質量は6.71kg、ねじり静コンプライアンスは $8.24 \times 10^{-6} \text{ rad/Nm}^2$ となった。部材直径の下限值 x_i^L および上限値 x_i^U は断面寸法のみ最適化と同様に4mm、200mmとした。またねじり静コンプライアンスの制約値 S_f^* および制約式のトレランスも式(4-4)および式(4-5)で定めたと同様に $8.34 \times 10^{-6} \text{ rad/Nm}^2$ 、0.03とした。

さらに、フレームの部材配置は、ねじり剛性と重量以外にも種々の機能的制約を満足していなければならない。それらの制約には以下のものがある。

- ①燃料タンクの占める空間が確保されること
- ②座席の占める空間が確保されること
- ③前輪の占める空間が確保されること
- ④ロードクリアランスが一定レベル以上あること
- ⑤、⑥エンジンがスイングアームピボットと干渉しないこと

図4-9に①～⑥の制約を表わす式を示す。

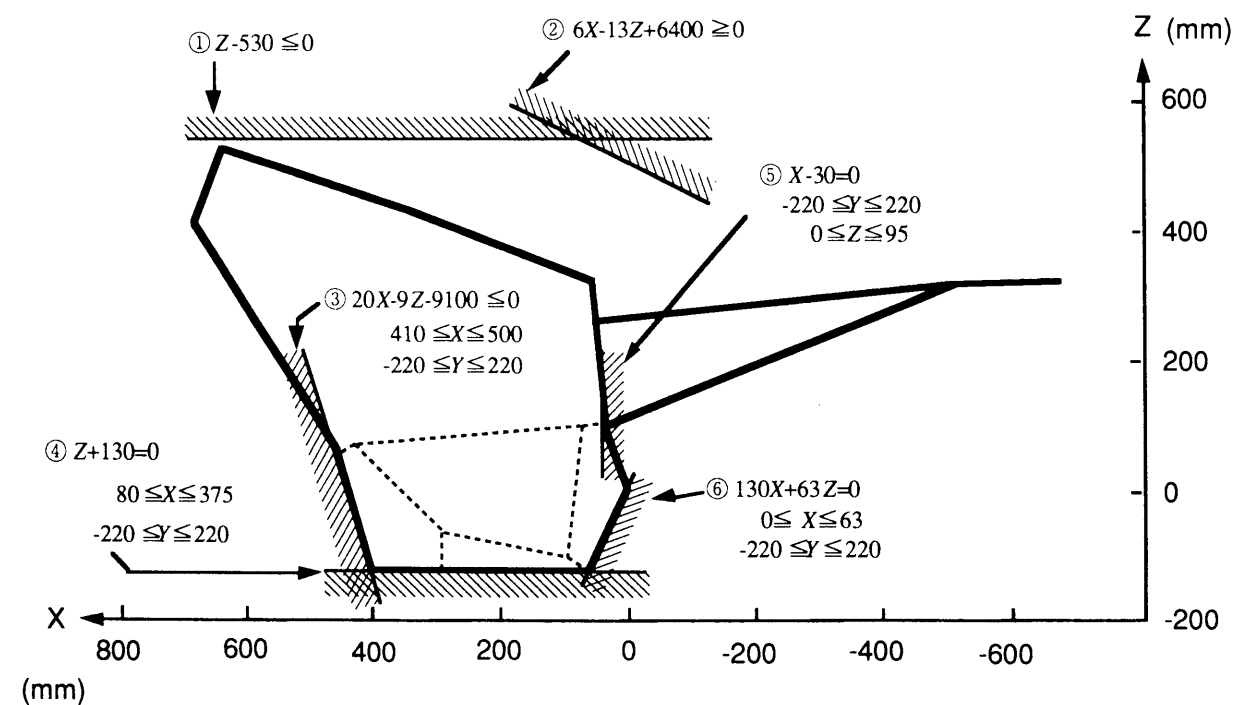


図4-9 フレーム形状に関する制約式群

(2) 最適化の結果

図4-10に示したモデルを初期設計として、部材断面寸法および節点座標の同時最適化を実行した結果を図4-11に示す。最適化後では部材断面寸法、フレーム形状とも著しく変化していることがわかる。図中では、実線の幅は各部材直径に対応しており、一点鎖線はその部材直径が下限値であることを示す。また、破線は最適化対象外の部材を表わす。フレーム形状の変化に関しては、表4-1に最適化前後の節点座標値を示す。

目的関数であるフレーム質量は、初期設計の6.71kgから39%減少して4.10kgとなった。最適化後のねじり静コンプライアンスは、部材断面のみの最適化結果と同じく $8.57 \times 10^{-6} \text{ rad/Nm}^2$ である。

(3) 結果の考察

最適化の結果、断面寸法のみ最適化結果と同様、エンジン下の部材5、6と、スイングアームピボット上下のブリッジ部材11、12は消滅した。ただし、断面寸法のみ

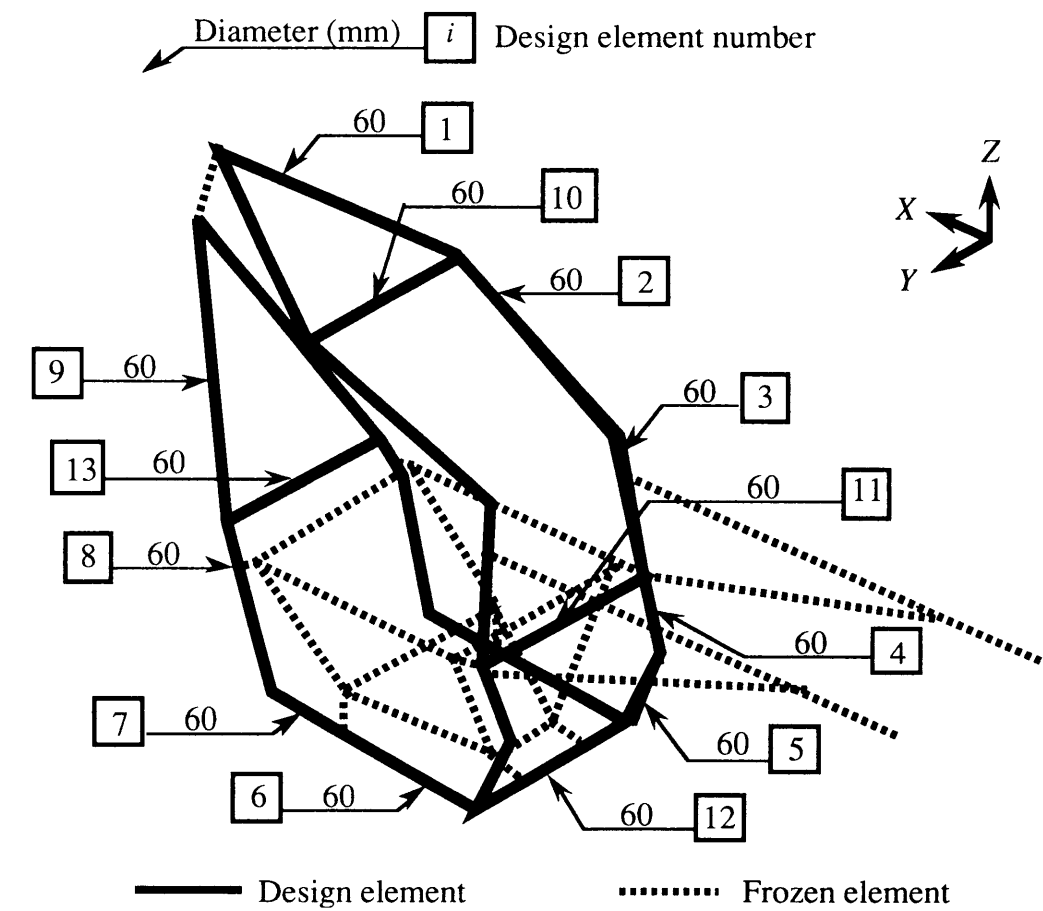


図4-10 初期設計におけるフレーム形状および部材直径

最適化で消滅したエンジン懸架点 C と D の間の部材は残っている。これは、一般的に構造物の剛性は、その支持点がねじり軸から遠くに位置すればするほど増すため、形状の変更により懸架点 D を Y 方向へ移動することにより、エンジン剛性がより有効にフレーム全体構造の剛性に寄与できるようになったためであると考えられる。このことから、エンジンの懸架位置は、エンジンを保持するだけでなく、その持つ高い剛性をフレーム全体に反映させるためにも非常に重要であることがわかる。

また、最も顕著なフレーム形状の変化として、ブリッジ部材 10 および 13 が極端に短くなったことが挙げられる。この理由は、これらの部材が左右対称の構造のゆがみを抑制するためのものであり、ヘッドパイプに負荷されたねじり荷重に対してその役割をはたすためには、なるべく左右の部材が近接して配置されることが合理的であるためと考えられる。

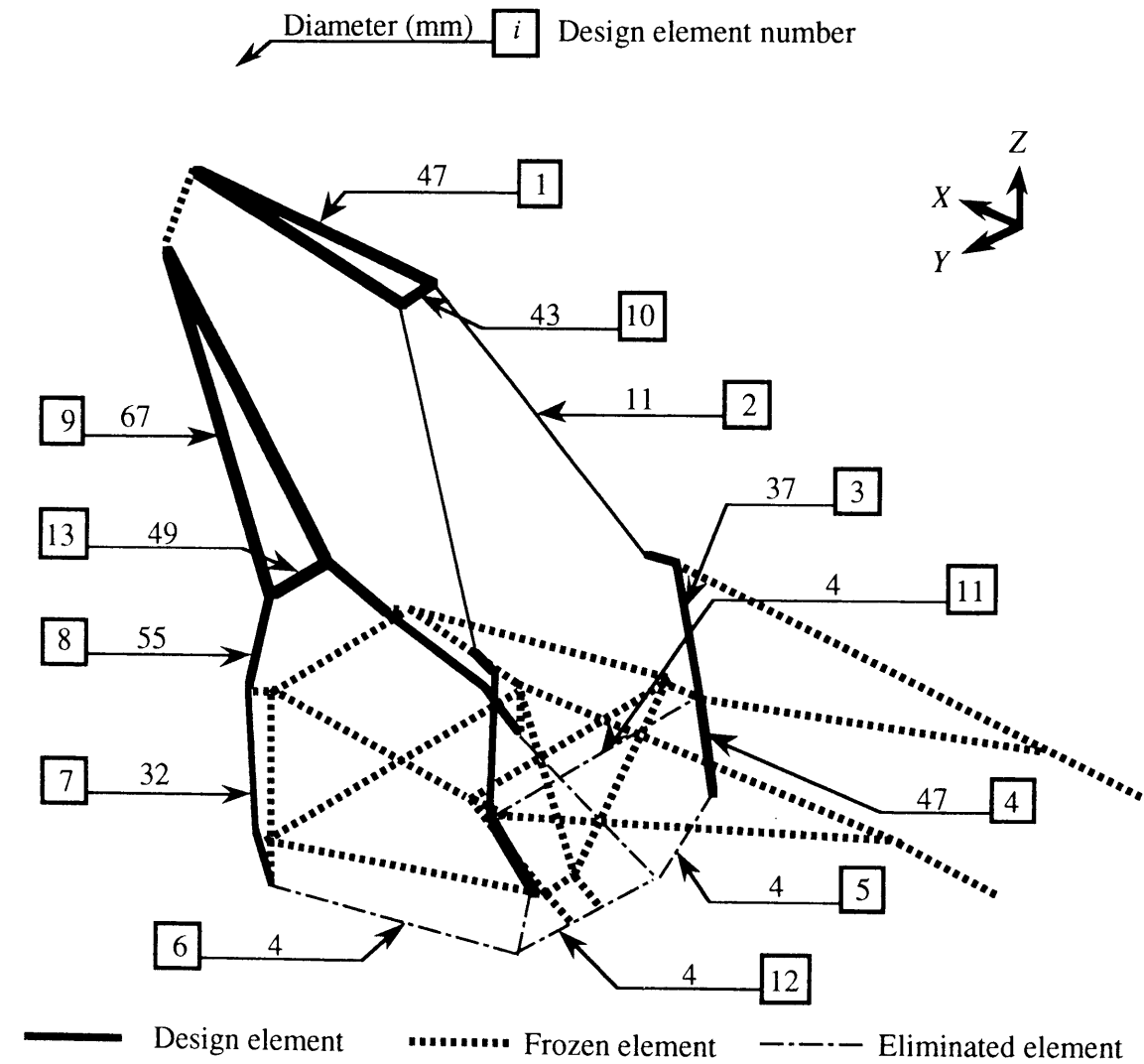


図4-11 部材断面寸法と節点座標の同時最適化の結果

表4-1 節点座標の上下限制約値、初期値、および最適値

設計変数		下限値	初期値	最適値	上限値
1	X	0.0	350.0	301.0	670.0
	Y	0.0	130.0	24.1	220.0
	Z	-130.0	420.0	530.0	530.0
2	X	0.0	60.0	95.0	670.0
	Y	0.0	110.0	122.0	220.0
	Z	-130.0	310.0	250.0	530.0
3	X	0.0	55.0	55.8	670.0
	Y	0.0	120.0	132.0	220.0
	Z	-130.0	250.0	250.0	530.0
4	X	---	---	(40.0)	---
	Y	0.0	140.0	148.0	220.0
	Z	-130.0	90.0	90.0	95.0
5	X	---	---	(80.0)	---
	Y	0.0	140.0	148.0	220.0
	Z	-130.0	90.0	90.0	530.0
6	X	0.0	60.0	52.9	63.0
	Y	100.0	130.0	100.0	220.0
	Z	-130.0	-130.0	-116.0	530.0
7	X	0.0	60.0	52.9	63.0
	Y	0.0	50.0	20.0	220.0
	Z	-130.0	-130.0	-116.0	530.0
8	X	0.0	100.0	92.9	430.0
	Y	0.0	50.0	20.0	220.0
	Z	-130.0	-110.0	-96.0	530.0
9	X	80.0	290.0	335.0	375.0
	Y	0.0	130.0	184.0	220.0
	Z	---	---	(-130.0)	---
10	X	80.0	290.0	335.0	375.0
	Y	0.0	130.0	184.0	220.0
	Z	---	---	(-70.0)	---
11	X	0.0	400.0	372.0	500.0
	Y	0.0	130.0	164.0	220.0
	Z	-130.0	-130.0	-72.0	530.0
12	X	0.0	460.0	447.0	500.0
	Y	0.0	130.0	101.0	220.0
	Z	-130.0	40.0	11.0	530.0
13	X	0.0	430.0	417.0	500.0
	Y	0.0	130.0	101.0	220.0
	Z	-130.0	60.0	31.0	530.0
14	X	0.0	480.0	477.0	500.0
	Y	0.0	120.0	40.2	220.0
	Z	-130.0	90.0	82.6	530.0

単位はmm ()内の数字は設計変数ではない自由度の座標値を示す。

4-3-4 位相の変更を行なった設計

前項までに、部材断面寸法の最適化によって、エンジンがフレームの上部構造から吊り下げられるという初期設計とは異なった構造が得られ、さらに節点座標をも設計変数とすることによって形状の変更がより軽量の構造を与えることが示された。このように、OPTSYSを用いることによって、はり要素の断面特性だけでなくそれを構成する節点も設計変更できるため、与えられた条件内でより理想的なフレーム構造諸元決定への接近が可能となる。

しかしながら、より良い構造設計は、以上のようないわゆる「形状の最適化」ばかりでなしうるわけではなく、部分構造の連結性までも考慮した「位相の最適化」が必要となる。以下に、形状最適化の結果を設計者が目視で検討することによって新しい構造位相を見だし、それを初期設計として再び最適化を実行することが有効であることを示す。

(1) 目視による構造位相の変更

前項で述べたように、部材断面寸法と節点座標の同時最適化の結果で最も特徴的なのは、図4-11に示したフレーム形状において部材10と部材13が極端に短くなり、その結果進行方向に対して左右に振り分けられていた部材1と部材9が近接した点である。このブリッジ部材10と13の短縮が、構造の新しい位相を示唆すると判断することは不自然ではないと考えられる。また、部材1と部材9の直径はそれぞれ47mmおよび67mmであり、実際にはこれだけ大きな直径を持つ円管を左右独立に振り分けて制作することは不可能である。

以上の理由から、ここでは図4-11に示した結果からモデルの修正を行なって部材1と9の左右を統合し、これを初期設計として最適化を行なった。統合後のそれぞれの部材直径は、統合によって質量が変化しないように次の式で決定した。

$$\phi_1' = 2\phi_1 - t_1 \quad (4-7)$$

$$\phi_9' = 2\phi_9 - t_9 \quad (4-8)$$

ここで、 ϕ_1 と ϕ_9 、および t_1 と t_9 は位相変更前の最適化によって得られた部材1と9の直径および肉厚、 ϕ_1' と ϕ_9' は統合後の直径である。この統合により設計変更部材数は11、設計変更される節点の数は対称性を考慮して14となった。図4-12に設計変更

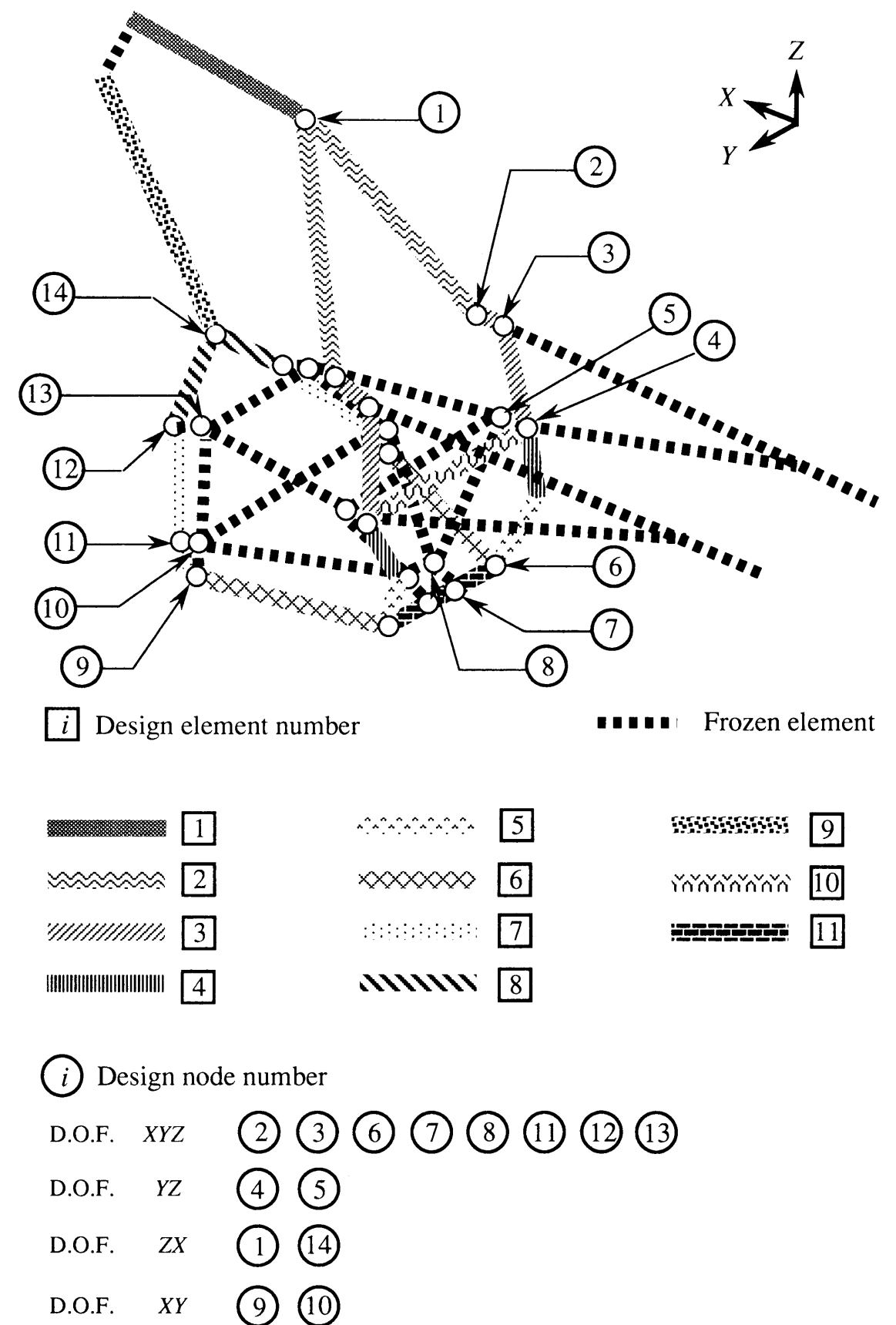


図4-12 設計変更部材のグループ、および設計変更節点とその自由度

部材のグループ、および設計変更節点とその自由度を示した。最適化の条件はすべて前項と同じである。

(2)最適化の結果

図4-13に示したモデルを初期設計として、再び部材断面寸法および節点座標の同時最適化を実行した結果を図4-14に示す。図中では、実線の幅は各部材直径に対応しており、一点鎖線はその部材直径が下限値であることを示す。また、破線は最適化対象外の部材を表わす。フレーム形状の変化に関しては、表4-2に最適化前後の節点座標値を示す。

目的関数であるフレーム質量は、位相変更前のそれから12%減少して3.62kgとなった。最適化後のねじり静コンプライアンスは、部材断面のみの最適化結果と同じく $8.57 \times 10^6 \text{ rad/Nm}^2$ である。

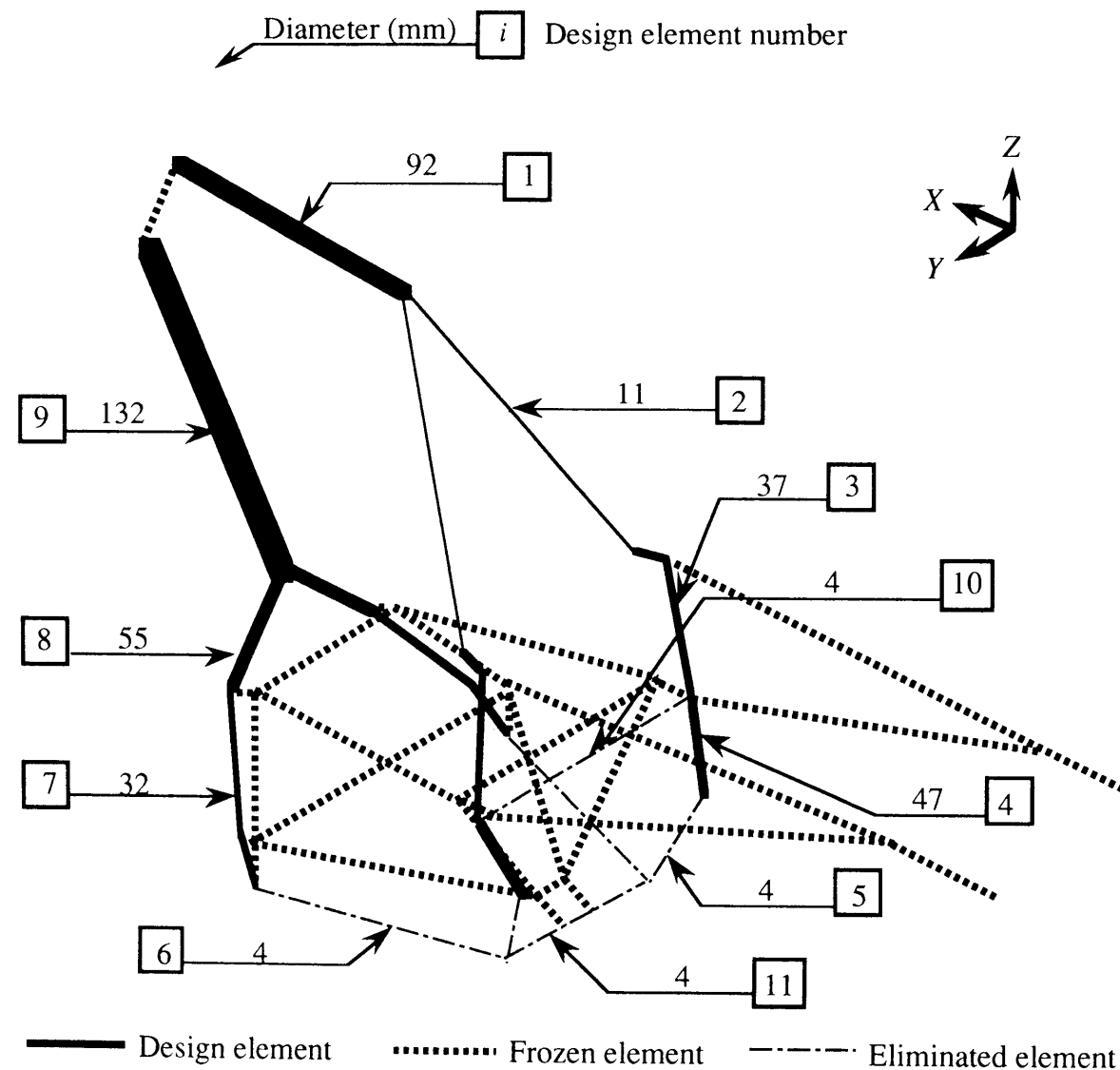


図4-13 初期設計における部材断面寸法

(3) 結果の考察

位相変更後の最適化の結果得られたフレームの部材配置には、初期形状と較べて顕著な変化は見られない。ただし、部材1と部材9の直径は初期設計から大きく減少している。このことは、位相変更によりこれらの部材を統合したことで、これらの部分がねじり荷重によるヘッドパイプの回転を直接的に抑制する効果を与えられて局所的により高剛性となり、結果的に同じ剛性を保持したまま軽量化が可能になったものと考えられる。

さらに図4-15には、4-3-3項および4-3-4項で行なわれた一連の質量最小化設計を通じて、フレーム形状が最終的にどのように変化したかを明らかにするために、初期形状と最適形状の投影図を示す。また、最適化を通じて生じた軽量化の履歴を図4-16に示す。

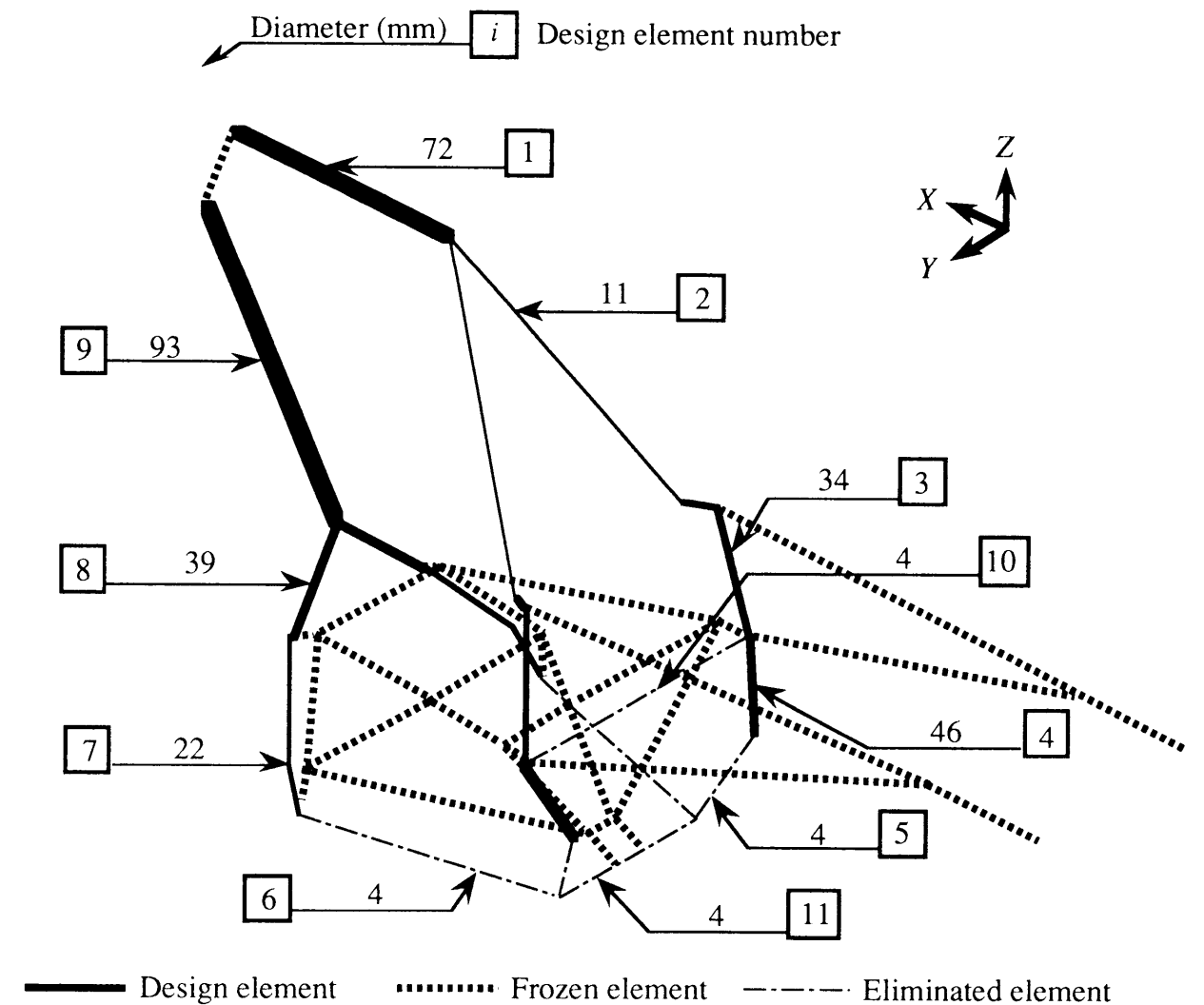


図4-14 位相変更後の部材断面寸法と節点座標の同時最適化の結果

表4-2 節点座標の上下限制約値、初期値、および最適値

設計変数		下限値	最適値	上限値
1	X	0.0	318.0	670.0
	Y	---	(0.0)	---
	Z	-130.0	530.0	530.0
2	X	0.0	103.0	670.0
	Y	0.0	120.0	220.0
	Z	-130.0	250.0	530.0
3	X	0.0	62.9	670.0
	Y	0.0	135.0	220.0
	Z	-130.0	250.0	530.0
4	X	---	(40.0)	---
	Y	0.0	159.0	220.0
	Z	-130.0	90.0	95.0
5	X	---	(80.0)	---
	Y	0.0	159.0	220.0
	Z	-130.0	90.0	530.0
6	X	0.0	52.5	63.0
	Y	100.0	100.0	220.0
	Z	-130.0	-115.0	530.0
7	X	0.0	52.5	63.0
	Y	0.0	20.0	220.0
	Z	-130.0	-115.0	530.0
8	X	0.0	92.5	103.0
	Y	0.0	20.0	220.0
	Z	-130.0	-95.0	530.0
9	X	80.0	349.0	375.0
	Y	0.0	173.0	220.0
	Z	---	(-130.0)	---
10	X	80.0	349.0	375.0
	Y	0.0	173.0	220.0
	Z	---	(-70.0)	---
11	X	0.0	377.0	500.0
	Y	0.0	164.0	220.0
	Z	-130.0	-75.0	530.0
12	X	0.0	445.0	500.0
	Y	0.0	89.5	220.0
	Z	-130.0	6.5	530.0
13	X	0.0	415.0	500.0
	Y	0.0	89.5	220.0
	Z	-130.0	26.5	530.0
14	X	0.0	479.0	500.0
	Y	---	(0.0)	---
	Z	-130.0	86.4	530.0

単位は mm ()内の数字は設計変数ではない自由度の座標値を示す。

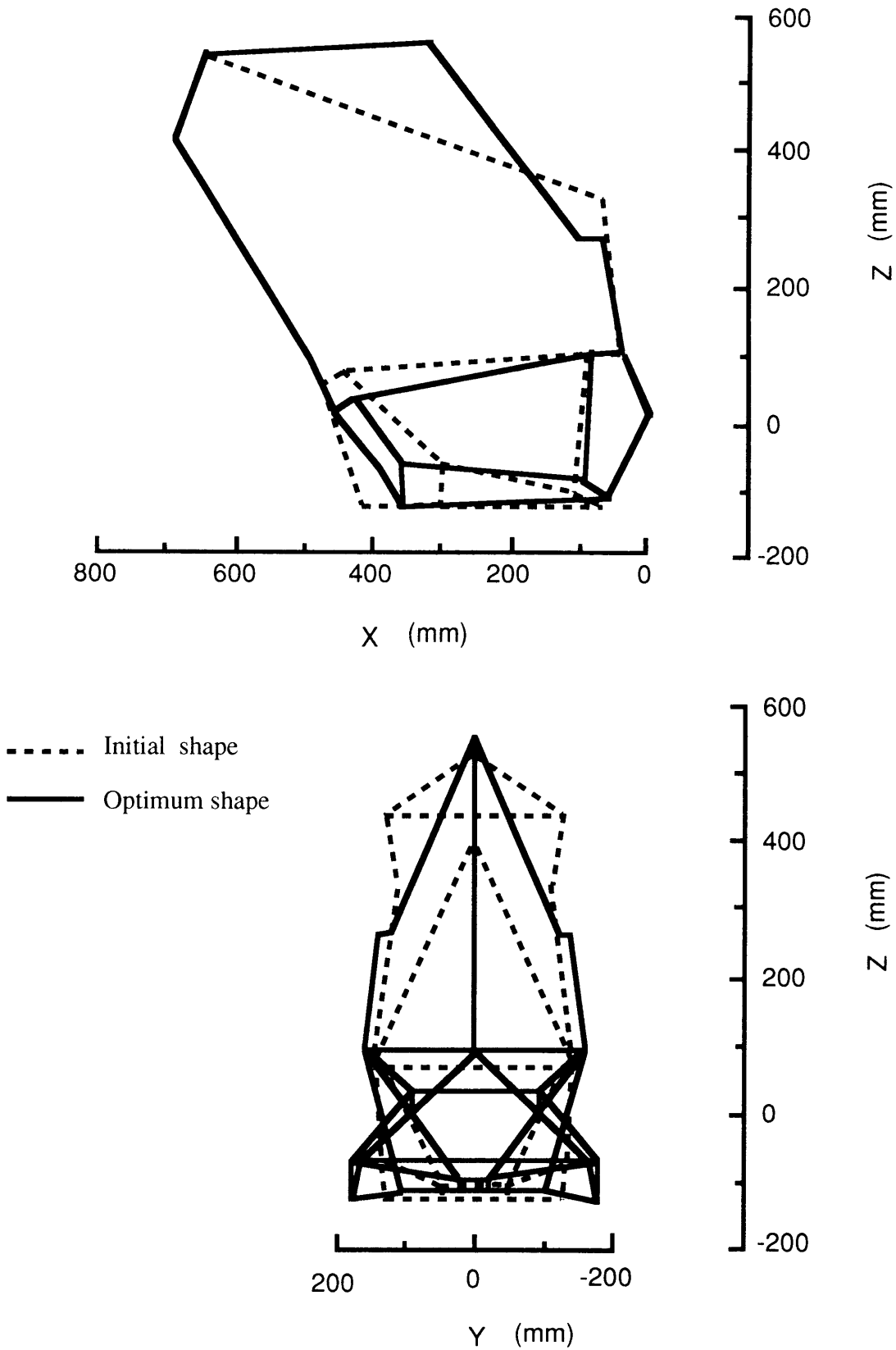


図4-15 初期形状と最適化形状の投影図

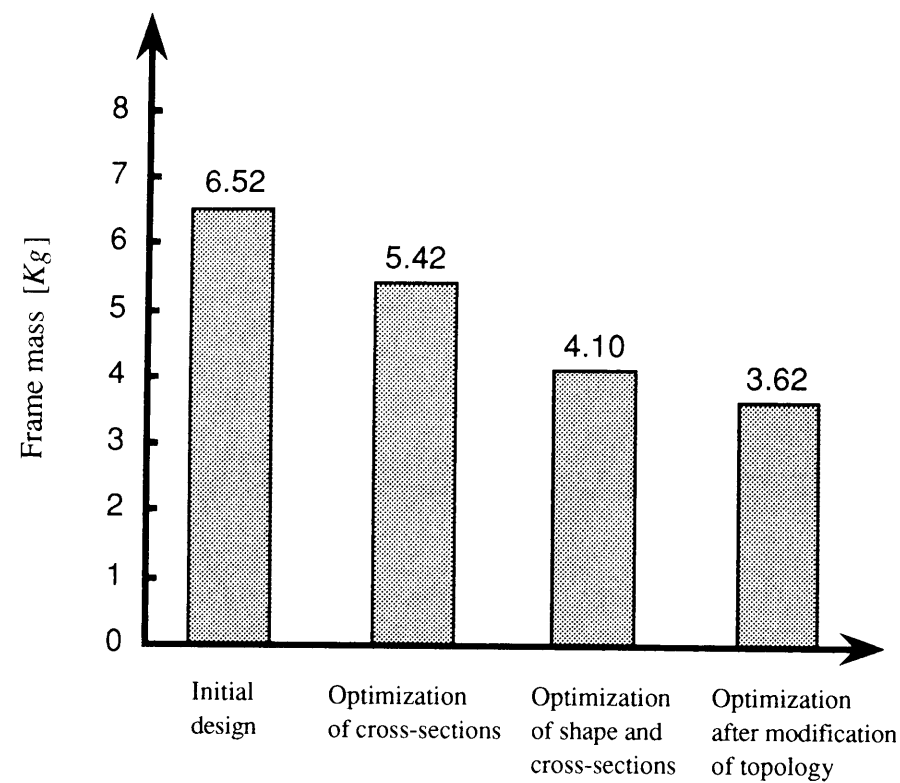


図4-16 一連の最適化の過程における質量の減少

4-3-5 質量最小化設計に関する総括

以上述べてきた一連の質量最小化設計の結果得られた知見をまとめると、以下のようになる。

(1) 設計変数が部材断面のみの場合は、エンジンの周囲の部材が消滅し、逆にエンジンと荷重負荷点を結ぶ部材やそれらを連結するブリッジの直径が増した。これらによりエンジンの高い剛性を利用するフレーム構造が得られた。

(2) 設計変数が部材断面と部材の節点座標の場合には、たとえばエンジン懸架点がねじり軸に対して外側に移動するなどの形状変更により、エンジン剛性をより効果的に全体剛性に利用する形状が得られた。また、最適化の過程でモデルの位相修正を行なうことにより、より単純で軽量の解が得られた。

(3) 部材断面のみの変更による解と、節点座標の同時変更によるそれを比較すると、同時変更した場合の方がはるかに軽量であり、最適化における形状および位相の変更の有効性が確認された。

4-4 質量最小化設計と静コンプライアンス最小化設計の関係

前節では、二輪車のフレームを例にとって、静コンプライアンスを制約条件とした質量最小化設計について述べた。しかし、工学的にはその逆に、質量を制約条件として静コンプライアンスを最小化するような最適化も考えなければならない場合がある。そのいずれの定式化を採用するかは、その時々設計要求によって決定されるべきものである。したがって、前節と同様に二輪車のフレームを例として、静コンプライアンス最小化の定式化による最適設計を試みることは、実際的な意義がある。本節では、次節で静コンプライアンス最小化設計を実行するのに先立って、静コンプライアンス最小化設計と、質量最小化設計の関係を理論的に明らかにしておく。

これまで述べてきたように、一般に最適化問題は以下のように定式化される。

$$\left. \begin{array}{l} \text{目的関数: } f(\mathbf{x}) \rightarrow \min \\ \text{制約条件: } g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (j=1,2,\dots,m) \\ \text{設計変数: } \mathbf{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n) \end{array} \right\} \quad (4-10)$$

このとき、以下のような Kuhn-Tucker の条件が成立する。すなわち、 $f(\mathbf{x})$ 、 $g_j(\mathbf{x})$ がともに凸で微分可能であるという条件のもとで、 $\mathbf{x}=\mathbf{x}^*$ が最適値であるための必要十分条件は、次の三つの条件を満足する非負の $\lambda^*=(\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*)$ が存在することである⁽⁴⁷⁾。

$$\frac{\partial f}{\partial x_i^*} + \sum_{j=1}^m \lambda_j^* \frac{\partial g_j}{\partial x_i^*} \geq 0 \quad (4-11)$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i^*} + \sum_{j=1}^m \lambda_j^* \frac{\partial g_j}{\partial x_i^*} \right) x_i^* = 0 \quad (4-12)$$

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j^* g_j(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (4-13)$$

ここで再び、質量最小化設計問題を以下のように定式化する。

$$\left. \begin{array}{l} \text{目的関数} : M_f \rightarrow \min \\ \text{ねじり静コンプライアンスに関する制約条件} : S_i - S_i^* \leq 0 \\ \text{その他の制約条件} : g_j \leq 0 \quad (j=1,2,\dots,m) \end{array} \right\} \quad (4-14)$$

式(4-14)で表わされる問題に Kuhn-Tucker の条件を適用すると、 $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ が最適値であるための必要十分条件は、次の三つの条件を満足する非負の $\lambda^* = (\lambda_s^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)$ が存在することである。

$$\frac{\partial M_f}{\partial x_i^*} + \lambda_s^* \frac{\partial S_i}{\partial x_i^*} + \sum_{j=1}^m \lambda_j^* \frac{\partial g_j}{\partial x_i^*} \geq 0 \quad (4-15)$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial M_f}{\partial x_i^*} + \lambda_s^* \frac{\partial S_i}{\partial x_i^*} + \sum_{j=1}^m \lambda_j^* \frac{\partial g_j}{\partial x_i^*} \right) x_i^* = 0 \quad (4-16)$$

$$\lambda_s^* (S_i - S_i^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j^* g_j^* = 0 \quad (4-17)$$

ここで、 λ_s^* はねじり静コンプライアンスに関する制約条件に対するラグランジュ乗数、 λ_j ($j=1, \dots, m$) は形状などに関する制約条件群に対するラグランジュ乗数である。

次に、質量を制約条件としたねじり静コンプライアンス最小化設計問題を以下のように定式化する。

$$\left. \begin{array}{ll} \text{目的関数} & : S_i \rightarrow \min \\ \text{質量に関する制約条件} & : M_f - \bar{M}_f^* \leq 0 \\ \text{その他の制約条件} & : g_j \leq 0 \quad (j=1, 2, \dots, m) \end{array} \right\} \quad (4-18)$$

ここで、 \bar{M}_f^* は質量に関する制約値である。式(4-14)で表わされる質量最小化問題に対してと同様に、式(4-18)で表わされる静コンプライアンス最小化問題に Kuhn-Tucker の条件を適用すると、 $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ が最適値であるための必要十分条件は、次の三つの条件を満足する非負の $\bar{\lambda}^* = (\lambda_M^*, \bar{\lambda}_1^*, \dots, \bar{\lambda}_m^*)$ が存在することである。

$$\frac{\partial S_i}{\partial x_i^*} + \lambda_M^* \frac{\partial M_f}{\partial x_i^*} + \sum_{j=1}^m \bar{\lambda}_j^* \frac{\partial g_j}{\partial x_i^*} \geq 0 \quad (4-19)$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial S_i}{\partial x_i^*} + \lambda_M^* \frac{\partial M_f}{\partial x_i^*} + \sum_{j=1}^m \bar{\lambda}_j^* \frac{\partial g_j}{\partial x_i^*} \right) x_i^* = 0 \quad (4-20)$$

$$\lambda_M^* (M_f - \bar{M}_f^*) + \sum_{j=1}^m \bar{\lambda}_j^* g_j^* = 0 \quad (4-21)$$

ここで、 λ_M^* は質量に関する制約条件に対するラグランジュ乗数、 $\bar{\lambda}_j$ ($j=1, \dots, m$) は形状などに関する制約条件群に対するラグランジュ乗数である。

いま、式(4-15)と式(4-16)の両辺に $1/\lambda_s^*$ (≥ 0) をかけて整理すると、次の式が得られる。

$$\frac{\partial S_i}{\partial x_i^*} + \frac{1}{\lambda_s^*} \frac{\partial M_f}{\partial x_i^*} + \sum_{j=1}^m \frac{\lambda_j^*}{\lambda_s^*} \frac{\partial g_j}{\partial x_i^*} \geq 0 \quad (4-22)$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial S_i}{\partial x_i^*} + \frac{1}{\lambda_s^*} \frac{\partial M_f}{\partial x_i^*} + \sum_{j=1}^m \frac{\lambda_j^*}{\lambda_s^*} \frac{\partial g_j}{\partial x_i^*} \right) x_i^* = 0 \quad (4-23)$$

このとき式(4-22)および式(4-23)において、

$$\lambda_M^* \equiv \frac{1}{\lambda_s^*} \quad (4-24)$$

$$\bar{\lambda}_j^* \equiv \frac{\lambda_j^*}{\lambda_s^*} \quad (4-25)$$

とおくと、ねじり静コンプライアンス最小化問題に対する Kuhn-Tucker 条件の第一式(4-19)と第二式(4-20)が得られる。

さらに、式(4-14)の質量最小化問題の最適点での目的関数値を M_f^* とすると、最適点で、ねじり静コンプライアンスに関する制約条件がアクティブであれば、次の関係が成立する。

$$S_i - S_i^* = 0 \Leftrightarrow M_f - M_f^* = 0 \quad (4-26)$$

また、結果的に式(4-17)においては以下の関係が成立することになる。

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j^* g_j^* = 0 \quad (4-27)$$

したがって、式(4-27)および式(4-25)より次の関係は明らかである。

$$\sum_{j=1}^m \bar{\lambda}_j^* g_j^* = 0 \quad (4-28)$$

すると、ねじり静コンプライアンス最小化問題において、

$$\bar{M}_f^* = M_f^* \quad (4-29)$$

となるように質量に関する制約値を決めれば、対応する Kuhn-Tucker 条件の第三式 (4-21) が成立することになる。

以上のことより、質量最小化問題に対応する Kuhn-Tucker 条件から、その最適点の目的関数値を制約値としたねじり静コンプライアンス最小化設計に対応する Kuhn-Tucker 条件が導かれた。このことを言い換えれば、前節で得られた質量最小化設計の目的関数の最小値を制約条件の値として、ねじり静コンプライアンスの最小化設計を実行すれば、その制約条件がアクティブであるかぎり、質量最小化設計の最適解とまったく同じ解が得られなければならないということである。次節では、実際にこのことを確かめる。

4-5 静コンプライアンス最小化設計

4-5-1 静コンプライアンス最小化設計の定式化

前節で述べたように、本節ではフレームの質量が所期の値以下となるように制約条件を設定した上で、ねじり静コンプライアンスが最小となる設計を試みる。設計変数としては、質量最小化設計で行なったのと同様に、部材断面寸法のみの場合、部材断面寸法と節点座標を同時に変更する場合、そして、その結果を見て可能ならば位相の変更を加えた場合、のそれぞれについて検討を行なう。いずれの場合も、ねじり静コンプライアンス最小化問題は、以下のように定式化される。

$$\left. \begin{array}{l} \text{目的関数: } S_t \rightarrow \min \\ \text{制約条件: } M_f - M_f^* \leq 0 \\ \quad \quad \quad x_i^L \leq x_i \leq x_i^U \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ \text{設計変数: } \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array} \right\} \quad (4-30)$$

ここで、 M_f^* としては前節の質量最小化設計のそれぞれで得られた質量の最小値を用いる。

4-5-2 断面寸法のみを設計変数とした設計

(1) 最適化条件および設計変数グループ

最初に、式(4-30)の定式化に従い、部材を構成する節点は動かさず、部材断面寸法だ

けを設計変更して最適化を行なう。有限要素モデルは、図4-3に示したものをそのまま用いる。部材のグループについても、前節4-3-2項の図4-5に示したように左右で対応する部材の直径は同じ設計変数として取り扱う。設計変数の総数は15である。今度は設計変数の初期値はすべての部材に対して一律に40mmを与えた。これは、フレーム質量に関する制約値を次のように前節4-3-2項で得られた最小値とした結果、初期設計点においてほぼその質量を与えるためには、小さな直径が要求されたからである。

$$M_f^* = 5.42 \text{ [kg]} \quad (4-31)$$

その他の条件は前節と変わらず、管の肉厚 t は2mmで一定、設計変数の下限値 x_i^L はすべて4mm、上限値 x_i^U は200mmとした。ただし、ここでの最適化結果を質量最小化設計の結果と比較するために、制約条件式のトレランスは厳密に0.0とした。

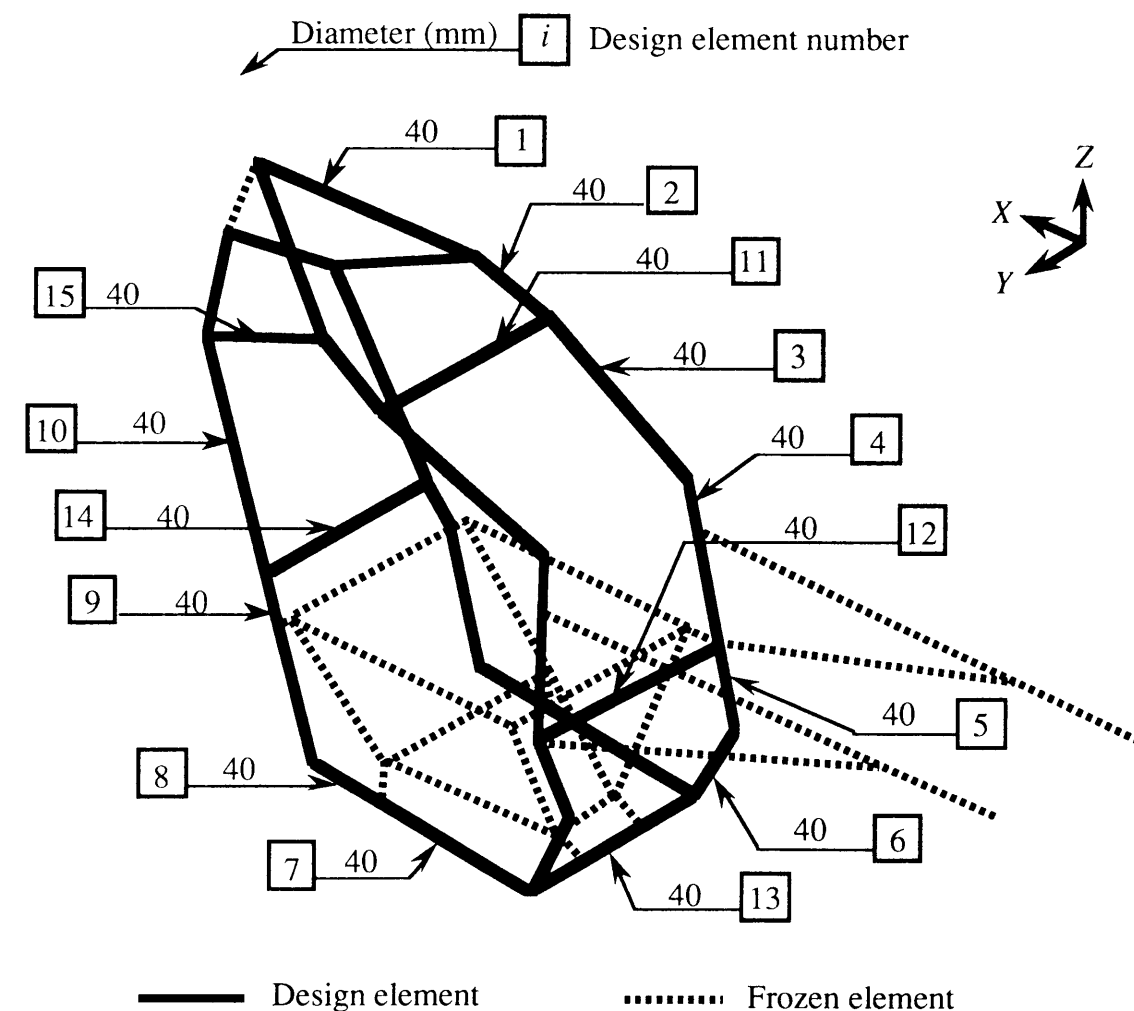


図4-17 初期設計における部材断面寸法

(2) 最適化の結果

可能方向法を用いた最適化の結果、図4-17に示した初期設計に対して、図4-18に示すような部材直径の分布が得られた。初期設計ではすべての部材が等しい直径を与えていたのに対して、最適化後ではその分布が著しく変化していることがわかる。これらの図中では、実線の幅は各部材直径に対応しており、一点鎖線はその部材直径が下限値であることを示す。また、破線は最適化対象外の部材を表わす。

目的関数であるフレームのねじり静コンプライアンスは、初期設計での $1.39 \times 10^{-5} \text{ rad/Nm}^2$ から $8.34 \times 10^{-6} \text{ rad/Nm}^2$ まで 40 % 減少した。また、最適化後の質量は、トレランスを 0 としたためにほぼ制約値通りの 5.45kg となった。

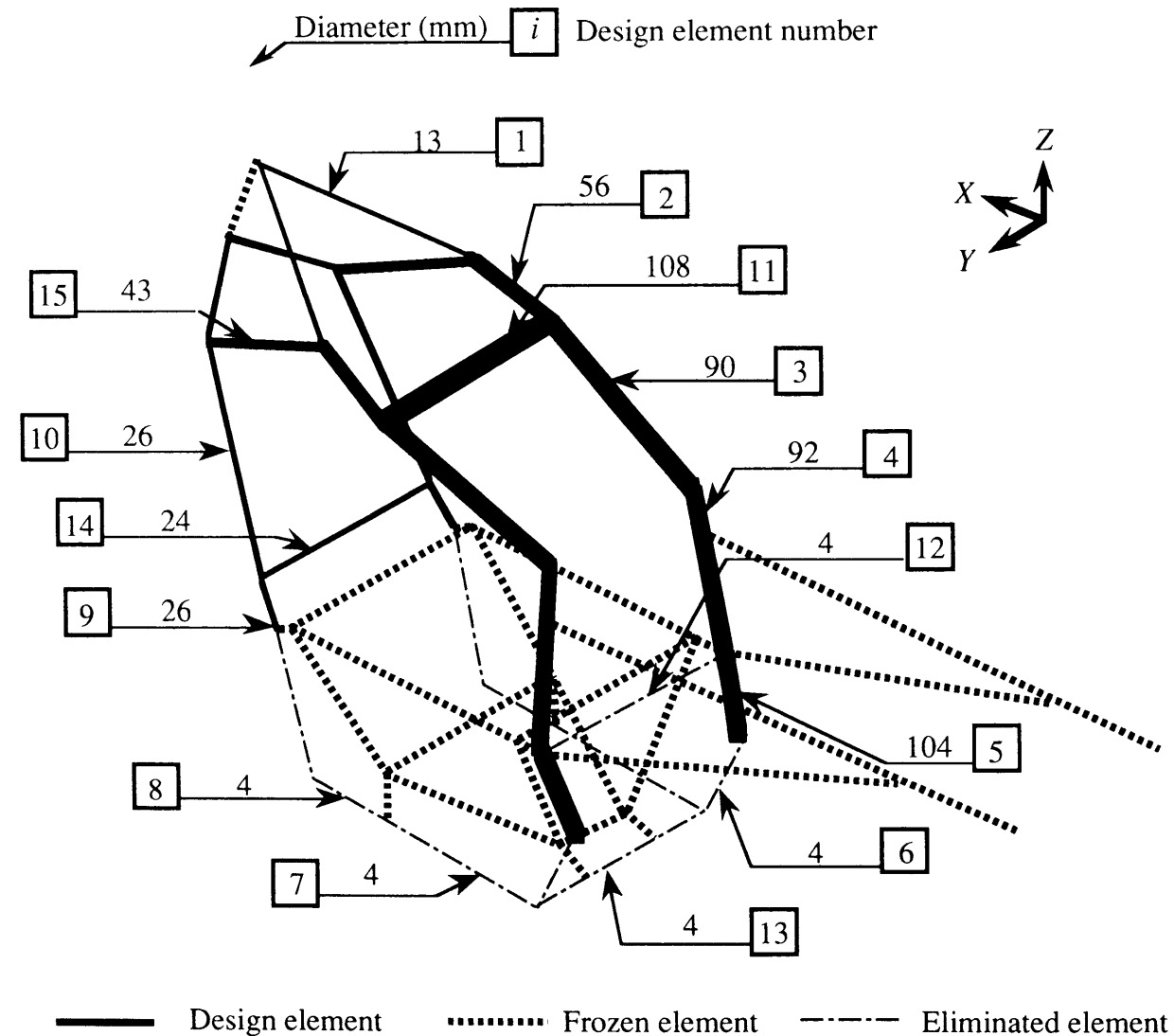


図4-18 部材断面寸法のみを設計変数とした静コンプライアンス最小化設計結果

(3) 最適化結果の考察

図4-18を図4-7と比較してみると、両者が極めて似た部材断面分布を示していることがわかる。特に注目される共通点は、部材 6、7、8、12、13 の直径が下限値である 4mm にまで減少したこと、逆に、エンジン上部にあってスイングアームピボットに近い部材 4、5 はその直径が大きく増したこと、などである。

結果的に、ねじり静コンプライアンス最小化設計でも、エンジンがフレームの下部部材の上に設置される構造を初期設計として、エンジンがフレームの上部部材から吊り下げられる最適化構造が得られたことがわかる。

4-5-3 断面寸法と節点座標を同時に設計変数とした設計

(1) 最適化条件および設計変数グループ

次に、設計変数として部材の直径だけでなく部材構成節点の座標値も同時に変更するねじり静コンプライアンス最小化を行なう。最適化モデルは前節で図4-8に示したのと同じように、部材断面寸法のための最適化に用いたモデルをやや簡単化したものを用いた。また、設計変更部材のグループ、および設計変更節点とその自由度についてもすべて同じである。したがって、設計変更部材数は 13、設計変更される節点の数は 28 であり、設計変数の総数は 51 である。また、モデルの簡単化にともない、初期設計での質量を質量最小化設計で得られた最小値とほぼ等しくするため、部材初期寸法として一律に 30mm を与えた。この変更により、初期設計におけるフレームのねじり静コンプライアンスは $5.85 \times 10^{-5} \text{ rad/Nm}^2$ 、質量は 4.20 kg となった。部材直径の下限値 x_i^L および上限値 x_i^U はこれまでと同様に 4mm、200mm とした。質量の制約値は、4-3-3 項で得られた最小値を用いて、次のように定めた。

$$M_f^* = 4.10 [\text{kg}] \quad (4-32)$$

また、制約式のトレランスは 0.0 とした。さらに、フレームの部材配置に関する機能的制約も図4-9に示した 6 個の条件を課した。

(2) 最適化の結果

図4-19に示したモデルを初期設計として、部材断面寸法および節点座標の同時最適化を実行した結果を図4-20に示す。最適化後はやはり部材断面寸法、フレーム形状とも著しく変化している。部材断面寸法については、断面寸法のための最適化結果と同様、エン

ジン下の部材 5、6 と、スイングアームピボット上下のブリッジ部材 11、12 が消滅した。ただし、断面寸法のための最適化で消滅したエンジン懸架点 C と D の間の部材は残っている。また、フレーム形状の顕著な変化としては、ブリッジ部材 10 および 13 が極端に短くなったことが挙げられる。フレーム形状の変化に関する詳細なデータとして、表4-3に最適化前後の節点座標値を示す。

目的関数であるフレームのねじり静コンプライアンスは $8.27 \times 10^{-6} \text{ rad/Nm}^2$ となった。最適化後のフレーム質量は、トレランスを 0 としたためにほぼ制約値通り 4.11kg となった。

(3) 結果の考察

図4-20を質量最小化設計の結果の図4-11と比較してみると、両者は極めて似た部材断面分布を持っているだけではなく、部材配置に関してもほとんど同じ形状を示していることがわかる。エンジン下部の部材 5、6、およびブリッジ部材 11、12 の直径が下限値

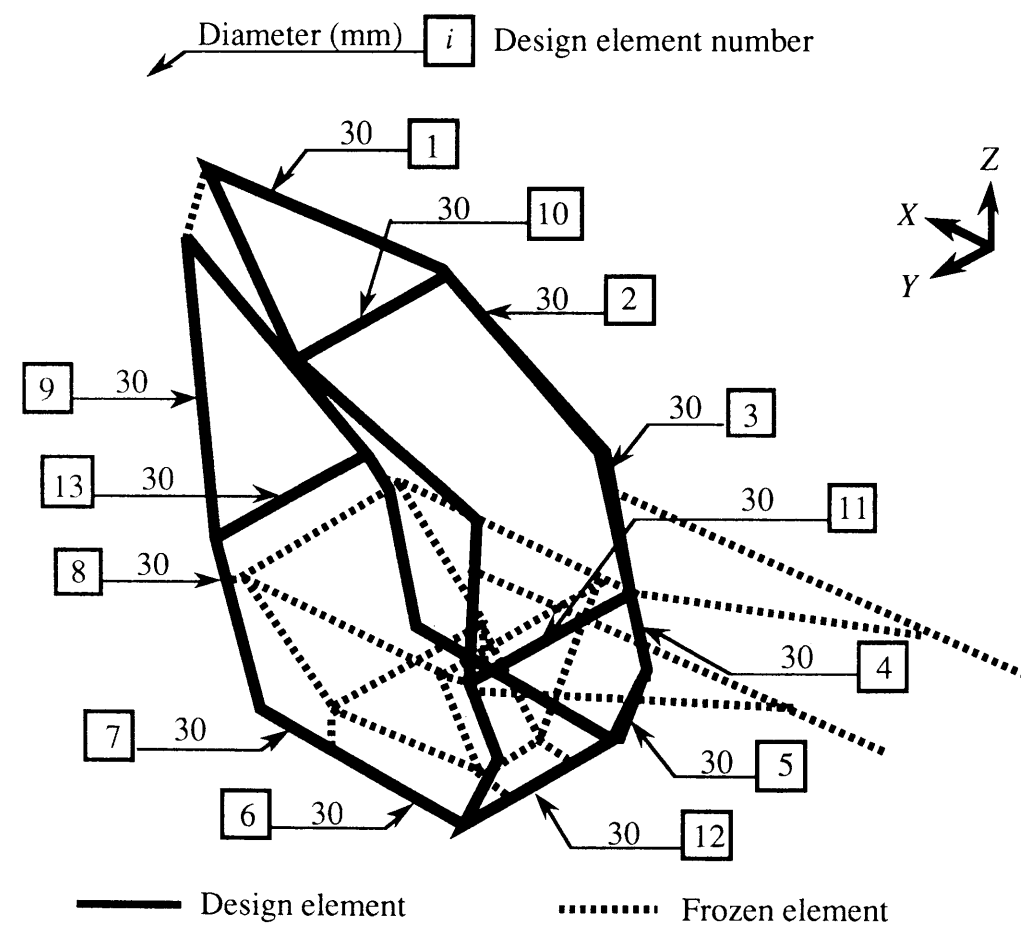


図4-19 初期設計におけるフレーム形状および部材直径

である4mmにまで減少したこと、さらに、進行方向に向かって振り分けられた部材 1 と 9 の左右が近接してその直径が増大したこと、などは特に注目される共通点である。

このように、節点座標値の変更を伴うねじり静コンプライアンス最小化設計でも、質量最小化設計とまったく同じように、エンジン剛性がより有効にフレーム全体構造の剛性に寄与できるようなフレーム部材配置への変化が生じ、エンジンがフレームの上部部材から吊り下げられる最適化構造が得られたことがわかる。

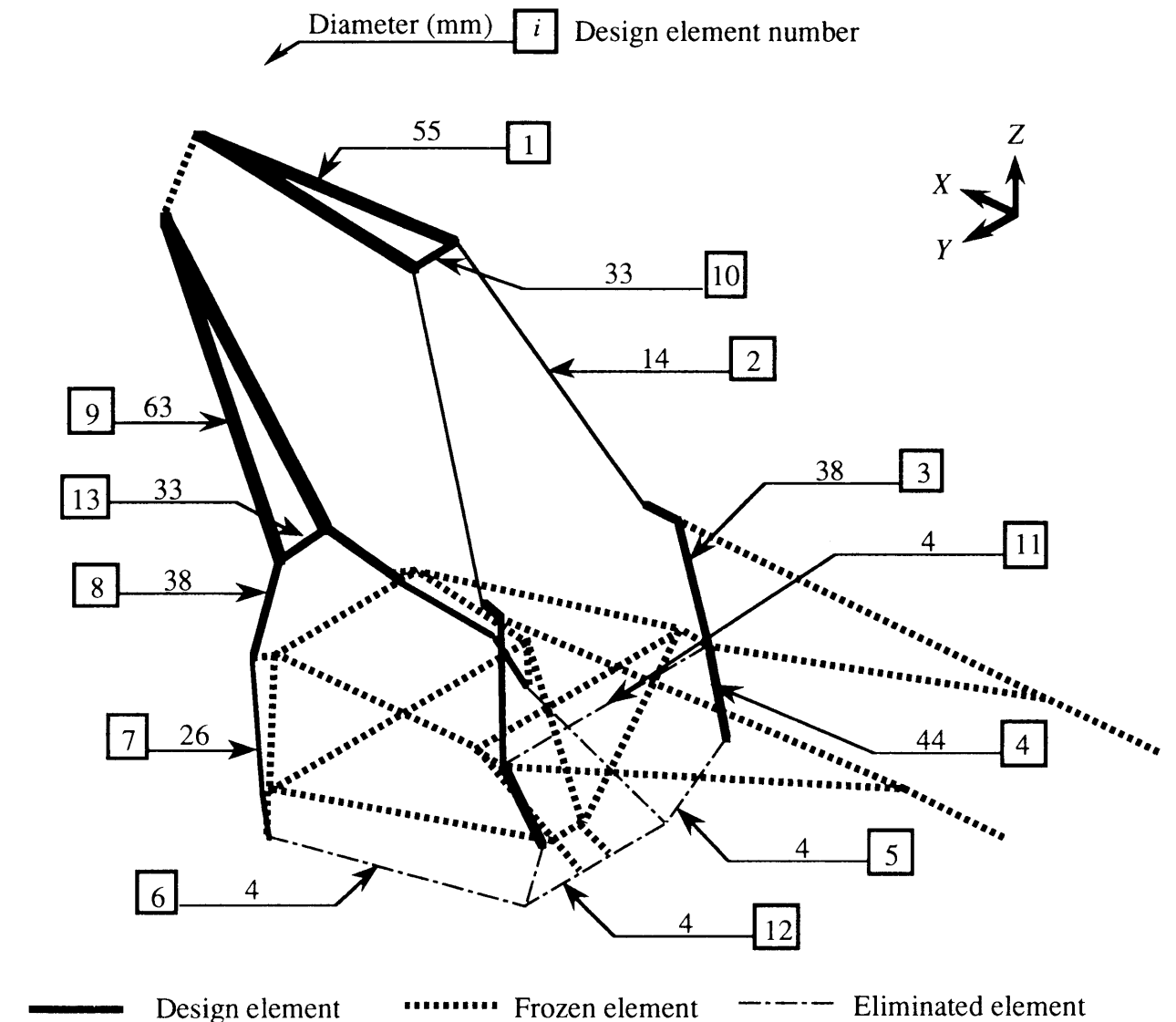


図4-20 部材断面寸法と節点座標の同時最適化の結果

表4-3 節点座標の上下限制約値、初期値、および最適値

設計変数		下限値	初期値	最適値	上限値
1	X	0.0	350.0	286.0	670.0
	Y	0.0	130.0	30.7	220.0
	Z	-130.0	420.0	530.0	530.0
2	X	0.0	60.0	101.0	670.0
	Y	0.0	110.0	118.0	220.0
	Z	-130.0	310.0	250.0	530.0
3	X	0.0	55.0	66.7	670.0
	Y	0.0	120.0	124.0	220.0
	Z	-130.0	250.0	250.0	530.0
4	X	---	---	(40.0)	---
	Y	0.0	140.0	149.0	220.0
	Z	-130.0	90.0	90.0	95.0
5	X	---	---	(80.0)	---
	Y	0.0	140.0	149.0	220.0
	Z	-130.0	90.0	90.0	530.0
6	X	0.0	60.0	52.4	63.0
	Y	100.0	130.0	100.0	220.0
	Z	-130.0	-130.0	-115.0	530.0
7	X	0.0	60.0	52.4	63.0
	Y	0.0	50.0	20.0	220.0
	Z	-130.0	-130.0	-115.0	530.0
8	X	0.0	100.0	92.4	103.0
	Y	0.0	50.0	20.0	220.0
	Z	-130.0	-110.0	-95.0	530.0
9	X	80.0	290.0	338.0	375.0
	Y	0.0	130.0	186.0	220.0
	Z	---	---	(-130.0)	---
10	X	80.0	290.0	338.0	375.0
	Y	0.0	130.0	186.0	220.0
	Z	---	---	(-70.0)	---
11	X	0.0	400.0	365.0	500.0
	Y	0.0	130.0	168.0	220.0
	Z	-130.0	-130.0	-73.0	530.0
12	X	0.0	460.0	443.0	500.0
	Y	0.0	130.0	102.0	220.0
	Z	-130.0	40.0	2.3	530.0
13	X	0.0	430.0	413.0	500.0
	Y	0.0	130.0	102.0	220.0
	Z	-130.0	60.0	22.3	530.0
14	X	0.0	480.0	474.0	500.0
	Y	0.0	120.0	34.0	220.0
	Z	-130.0	90.0	77.4	530.0

単位は mm ()内の数字は設計変数ではない自由度の座標値を示す。

4-5-4 位相の変更を行なった設計

(1)目視による構造位相の変更

前項でも、4-3節における質量最小化設計と同様に、部材 10 と部材 13 が極端に短くなり、その結果進行方向に対して左右に振り分けられていた部材 1 と部材 9 が極めて近接した構造が得られた。したがってここでも、図4-20に示した結果からモデルの修正を行なって部材 1 と 9 の左右を統合し、これを初期設計として最適化を行なった。統合後のそれぞれの部材直径は、統合によって質量が変化しないように式(4-7)および式(4-8)で決定した。

統合により設計変更部材数は 11、設計変更される節点の数は14となった。設計変更部材のグループ、および設計変更節点とその自由度についても図4-12に示したのとまっ

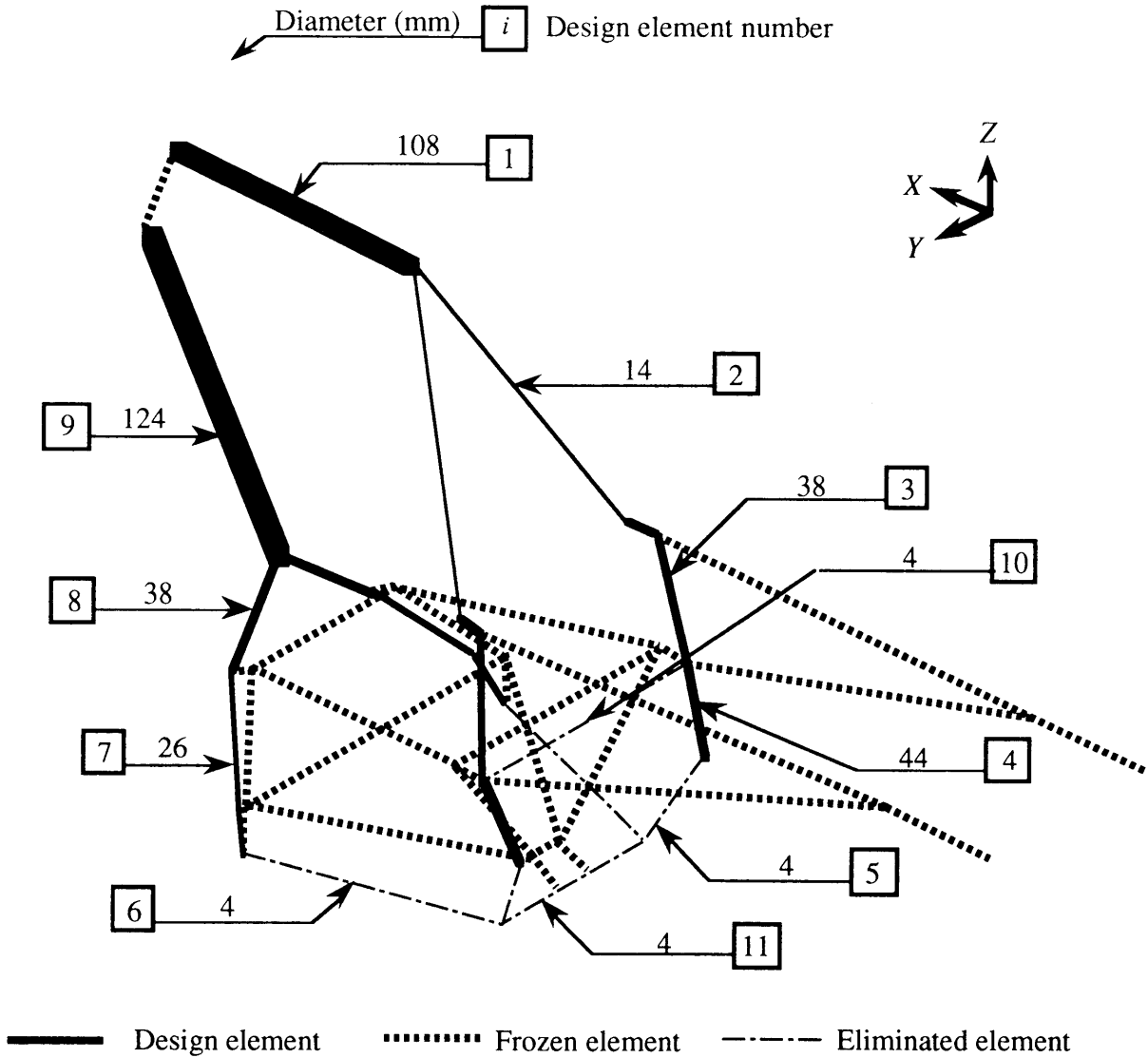


図4-21 初期設計における部材断面寸法

たく同様に定めた。質量の制約値は、4-3-4項で得られた最小値を用いて、次のように定めた。

$$M_f^*=3.62[kg]$$

(4-33)

また、制約式のトレランスは 0.0 とした。さらに、フレームの部材配置に関する機能的制約も図4-9に示した 6 個の条件を課した。その他の最適化の条件もすべてこれまでと同じである。

(2)最適化の結果

図4-21に示したモデルを初期設計として、再び部材断面寸法および節点座標の同時最適化を実行した結果を図4-22に示す。また、表4-4に最適化前後の節点座標値を示す。目的関数であるフレームのねじり静コンプライアンスは、 $8.27\times10^{-6}rad/Nm^2$ となった。最適化後のフレーム質量は、トレランスを 0 としたために制約値通り 3.62kg となった。

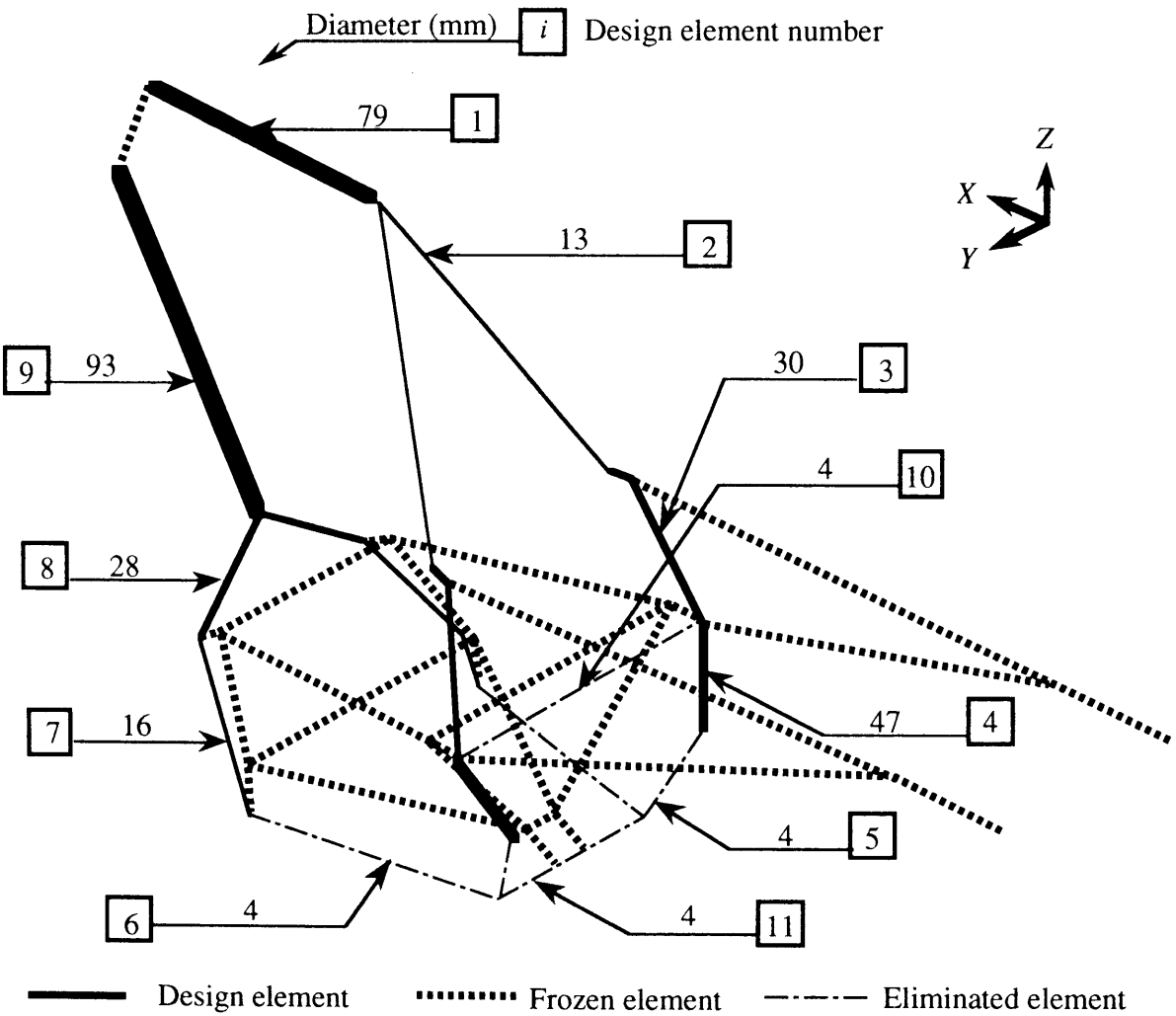


図4-22 位相変更後の部材断面寸法と節点座標の同時最適化の結果

表4-4 節点座標の上下限制約値および最適値

設計変数		下限値	最適値	上限値
1	X	0.0	317.0	670.0
	Y	---	(0.0)	---
	Z	-130.0	530.0	530.0
2	X	0.0	121.0	670.0
	Y	0.0	119.0	220.0
	Z	-130.0	250.0	530.0
3	X	0.0	96.6	670.0
	Y	0.0	125.0	220.0
	Z	-130.0	250.0	530.0
4	X	---	(40.0)	---
	Y	0.0	166.0	220.0
	Z	-130.0	90.0	95.0
5	X	---	(80.0)	---
	Y	0.0	166.0	220.0
	Z	-130.0	90.0	530.0
6	X	0.0	51.6	63.0
	Y	100.0	100.0	220.0
	Z	-130.0	-114.0	530.0
7	X	0.0	51.6	63.0
	Y	0.0	20.0	220.0
	Z	-130.0	-114.0	530.0
8	X	0.0	91.6	103.0
	Y	0.0	20.0	220.0
	Z	-130.0	-93.0	530.0
9	X	80.0	335.0	375.0
	Y	0.0	156.0	220.0
	Z	---	(-130.0)	---
10	X	80.0	335.0	375.0
	Y	0.0	156.0	220.0
	Z	---	(-70.0)	---
11	X	0.0	359.0	500.0
	Y	0.0	154.0	220.0
	Z	-130.0	-80.0	530.0
12	X	0.0	445.0	500.0
	Y	0.0	115.0	220.0
	Z	-130.0	6.6	530.0
13	X	0.0	415.0	500.0
	Y	0.0	115.0	220.0
	Z	-130.0	26.6	530.0
14	X	0.0	477.0	500.0
	Y	---	(0.0)	---
	Z	-130.0	82.8	530.0

単位はmm ()内の数字は設計変数ではない自由度の座標値を示す。

(3)結果の考察

図4-22を質量最小化設計の結果の図4-14と比較してみると、やはり両者は極めて似た部材断面分布を持っているだけでなく、部材配置に関してもほとんど同じ形状を示していることがわかる。部材1と部材9の直径が初期設計から大きく減少していることが大きな共通点であるといえる。このように、位相の変更を伴うねじり静コンプライアンス最小化設計でも、質量最小化設計とまったく同じように、ヘッドパイプに直接接合される部材が、ねじり荷重によるヘッドパイプの回転を直接的に抑制する効果を与えられて局所的により高剛性となるような変化が確認された。

そして図4-23には、4-5-3項および4-5-4項で行なわれた一連の質量最小化設計を通じて、フレーム形状が最終的にどのように変化したかを明らかにするために、初期形状と最適形状の投影図を示す

4-5-6 質量最小化と静コンプライアンス最小化の設計解の比較

4-4節で明らかにしたように、質量最小化設計で得られた質量の最小値を制約値として、逆に静コンプライアンス最小化設計を実行すると、得られる最適解は質量最小化設計で得られた最適解と同じでなければならない。本節で見てきたように、設計変数として部材断面寸法のみをとった場合、部材断面寸法だけでなく節点座標も同時に変更した場合、目視による位相の変更を行なった場合、のそれぞれについて、両者の結果はほぼ一致しているように見える。ここでは、両者の間で対応する設計解について、その一致度を定量的に評価することで、4-4節の議論を裏付けることにする。

まず、質量最小化設計と静コンプライアンス最小化設計の結果をもう一度まとめて表4-5に掲げる。質量最小化設計では、目的関数であるフレーム質量が一連の最適化によって1/2近くにまで減少した。この時、制約条件であるねじり静コンプライアンスは一定値を保っている。ただし、3%のトレランスの設定により、最適化後の静コンプライアンスの値はその制約値をやや上回ったものとなっている。これに対し、静コンプライアンス最小化設計では、制約条件のトレランスを0%とおいたため、いずれの場合も質量は制約値として与えた質量最小化設計の結果の値にほぼ保たれている。そして、この時得られた静コンプライアンスの最小値は、設計変数をどのように選んだ場合についても、すべて質量最小化設計での静コンプライアンスの制約値にほぼ一致している。

さらに、静コンプライアンス最小化設計によって質量最小化設計の結果とほとんど同じ部材断面寸法と部材配置が得られたことを定量的に示すために、以下のような方法

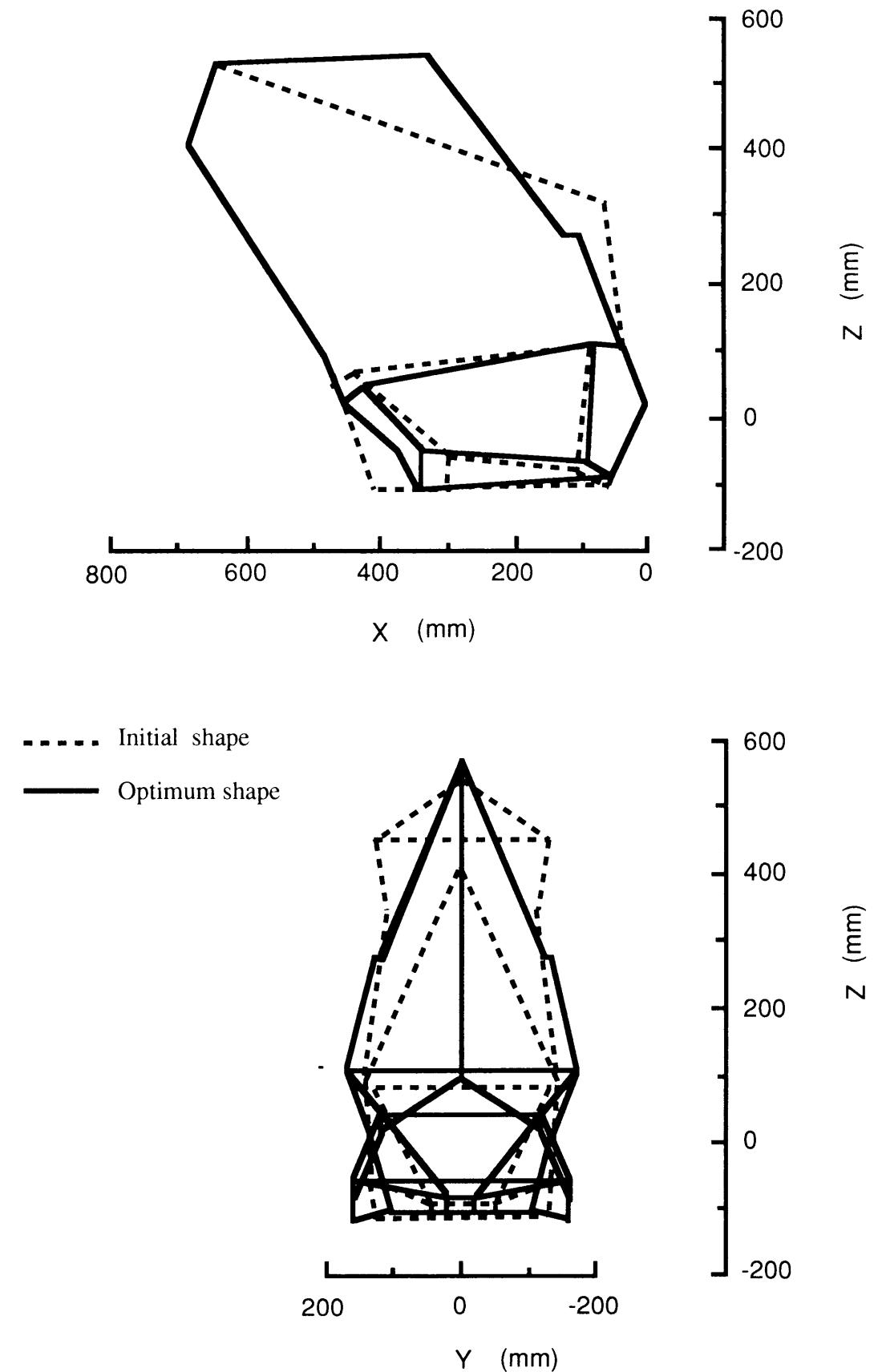


図4-23 初期形状と最適化形状の投影図

表4-5 静的最適設計結果のまとめ

最適設計 の定式化	フレーム 特性値	初期 設計	断面寸法 変更	断面寸法 と座標変更	位相 変更
質量 最小化設計	質量 [kg]	6.52	5.42	4.10	3.62
	静コンプライアンス [rad/Nm ²]	8.34×10 ⁻⁶	8.56×10 ⁻⁶	8.56×10 ⁻⁶	8.56×10 ⁻⁶
	静コンプライアンス 制約値 [rad/Nm ²]	---	8.34×10 ⁻⁶	8.34×10 ⁻⁶	8.34×10 ⁻⁶
静コンプライアンス 最小化設計	静コンプライアンス [rad/Nm ²]	1.39×10 ⁻⁵	8.34×10 ⁻⁶	8.27×10 ⁻⁶	8.27×10 ⁻⁶
	質量 [kg]	5.64	5.45	4.11	3.62
	質量 制約値 [kg]	---	5.42	4.11	3.62

による評価法を導入する。まず、相似性の度合いを調べたい二つの n 次元ベクトル \mathbf{a} および \mathbf{b} の内積をとると次のようになる。

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta \tag{4-34}$$

式(4-34)の両辺を二乗し、はさみ角 θ に関して整理すると次の関係が得られる。

$$\cos^2 \theta = \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}{|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2} \tag{4-35}$$

$\cos^2 \theta$ の値は、 θ の値によって 0 から 1 の間で変化する。いま、二つのベクトル \mathbf{a} と \mathbf{b} がまったく同じ方向を向いているなら $\theta = 0 [\text{rad}]$ より $\cos^2 \theta = 1$ であり、逆に直交しているなら $\theta = \pi/2 [\text{rad}]$ より $\cos^2 \theta = 0$ である。したがってベクトル \mathbf{a} と \mathbf{b} の相似

度が高ければ高いほど $\cos^2 \theta$ の値は 1 に近づき、逆に低ければ低いほど 0 に近づくことになる。この値は MAC (Modal Assurance Criteria) と呼ばれ、二つのベクトルの相似度を示す指標として用いられる。

ここでは、断面寸法のみ最適化、断面寸法と節点座標の同時最適化、位相変更を伴った断面寸法と節点座標の同時最適化、の三つの場合のそれぞれについて、質量最小化設計の結果得られた最適解である設計変数ベクトルと、静コンプライアンス最小化設計の結果得られた最適解である設計変数ベクトルとの間でMACを計算した。ただし、ベクトルの各成分は、質量最小化設計の設計変数ベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ および静コンプライアンス最小化設計の設計変数ベクトル $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ に関して次のような方法で正規化した。

$$\hat{\mathbf{a}} = (a_1/a_1, a_2/a_2, \dots, a_n/a_n) \\ = (1.0, 1.0, \dots, 1.0)$$

$$\hat{\mathbf{b}} = (b_1/a_1, b_2/a_2, \dots, b_n/a_n)$$

ここで、 $\hat{\mathbf{a}}$ および $\hat{\mathbf{b}}$ は正規化された質量最小化設計の設計変数ベクトルおよび静コンプライアンス最小化設計の設計変数ベクトルである。MAC 値の計算結果を表4-6に示す。どの場合も MAC 値はきわめて1.0 に近く、両者に高い相似性のあることが示された。

表4-6 質量最小化設計と静コンプライアンス最小化設計の結果比較

設計変数	MAC
部材断面寸法のみ	0.980
断面寸法と節点座標	0.976
位相変更後、断面寸法と節点座標	0.984

以上の結果は、質量最小化設計と静コンプライアンス最小化設計の関係について、4-4 節で論じた関係を裏付けているものである。また、OPTSYSを用いて理論的に予想される結果が得られたことより、このシステムの動作の妥当性が検証された。

4-6 結言

本章では、二輪車のフレームを例として、静的問題における最適構造設計を試みた。その結果得られた知見をまとめると、以下のようになる。

(1) 最初に、目的関数をフレームの質量、制約条件をねじり静コンプライアンスとする質量最小化設計を行なった。設計変数として、断面寸法のみ、断面寸法と節点座標、位相変更を伴った断面寸法と節点座標、の三つの場合について最適化を実行した。その結果、いずれの場合にも、エンジン剛性をより効果的に全体剛性に利用するフレーム構造が得られた。

(2) 設計変数としては、断面寸法だけよりも、節点座標も同時に採用したほうが設計の自由度が増し、はるかに軽量の解が得られることがわかった。さらに、節点座標を設計変数とした結果得られる形状は局所的に新しい位相を示唆している場合さえあり、設計者が目視による洞察を行なうことによってその位相を変更し、より簡潔で軽量・高剛性の構造に到達できることもわかった。

(3) 次に、質量最小化設計と、それとは目的関数と制約条件を逆にした静コンプライアンス最小化設計との関係を把握するために、質量最小化設計の定式化に最適性の条件である Kuhn-Tucker 条件を適用した。その結果、質量最小化設計で得られた最適値における質量の値を制約条件として、静コンプライアンス最小化設計を実行すると、質量最小化設計の解とまったく等しい解が得られなければならないことが導かれた。

(4) Kuhn-Tucker 条件が示す予測を受けて、質量最小化設計と同様、設計変数として断面寸法のみ、断面寸法と節点座標、位相変更を伴った断面寸法と節点座標、の三つの場合について静コンプライアンス最小化設計を実行した。この結果、いずれの場合においても質量最小化設計において制約値とした静コンプライアンスの値が目的関数の最小値として得られた。

(5) 質量最小化設計と静コンプライアンス最小化設計で得られた最適設計変数ベクトルについて、MAC を用いた相似度の定量化を行なった結果、いずれも高い MAC 値を示すことがわかった。この結果、Kuhn-Tucker 条件が示す理論的な予測が裏付けられたと同時に、最適構造設計システム OPTSYS の与える結果の妥当性が検証されたとの結論を得た。

第5章 動的問題における最適構造設計

5-1 緒言

機械構造物の設計において、その低振動化は大きな設計目標の一つである。なかでも、内燃機関などにより強制加振を受ける機械の低振動化設計は、以下の理由により一般に困難なものとなる。第一には、強制加振を受ける機械の振動評価では、単一加振力に対する単一応答点の応答評価だけですむ場合は少ないことが挙げられる。多くの場合、加振力を受ける点は複数個あり、その大きさや方向も変動する。また応答評価点も多数あり、それらすべての点での振動が考慮されなければ、対策は成功しない。第二に、加振周波数帯域が広い場合、少数の低次モードの固有振動数のシフトだけでは目的が果たされないことがある。多数の振動モード形状を同時に考慮した設計が必要とされる。

通常、振動応答特性を知るためには、固有振動数や固有ベクトルといったモーダルパラメータの同定が行なわれる。これには、有限要素法を用いた数値モデルに基づく振動解析や実験的モード解析などが用いられる。それらはいずれも強力な道具であり、解析手段としての有用性は高い。感度解析手法の発達により、構造変更による構造応答の変化も、限られた範囲で予測できるようになってきた。しかし、実設計に付随する上述のように困難な問題は、構造解析や感度解析の結果を吟味するだけでは解決されない。従来、感度解析の精度向上や、単一モードに着目した振動低減手法に関しては数々の提案がなされてきた。しかし、それらの結果を有効に利用し、より良い設計諸元を与えるシンセシス手法の開発にはあまり注意が払われてこなかった。

本章では、特に二輪車車体の低振動化設計に着目し、上述した現実的で複雑な問題への最適化手法を用いたアプローチを提案する。まず5-2節では、設計変更の過程で上述のような非常に多くの動的評価項目のどれが最も問題となるかが不明な設計問題に対して、多目的最適化手法の一手法であるTchebychevノルムによるスカラー化法（ミニマックス法）の適用が提示される。さらに5-3節では、自動二輪車のフレーム構造の有限要素モデルを提示した後、エンジン稼働時の車体各部の振動低減を目的としたフレーム部材の断面寸法の最適化を行なう。そしてこの手法により、実際の二輪車の車体に要求される数々の条件を満足しつつ、低振動化が実現できることを実証する。また5-4節では、振動応答の評価点間の重み付けを変更することによって、低振動化の達成度を設計者の意図に応じて調節できることを示す。

5-2 二輪車車体振動低減問題の定式化

5-2-1 問題の設定

走行中の自動二輪車は、様々な外力による加振を受ける。それらのうち、エンジンの加振によって車体各部に生じる振動は乗員にとって最も不快に感じられるものであり、その低減は車体設計において考慮すべき重要な目標の一つである。この設計問題では、以下の諸項目が考慮されなければならない。

- (1) 二輪車の乗員の身体は、図5-1に示すように、運転時には一カ所だけでなく、ハンドル、フロントフットレスト、リアフットレストなど数カ所に接触している。このことは振動応答を同時に評価すべき点が数カ所あることを意味する。
- (2) エンジンの加振力は各方向に対して常に一定ではない。図5-1中のエンジン部で模式的に示すような軌跡を描いて、クランクの回転角度ごとに連続的に変化する。単に一つの加振力に対して数カ所の応答点における評価をすればよいのではない。

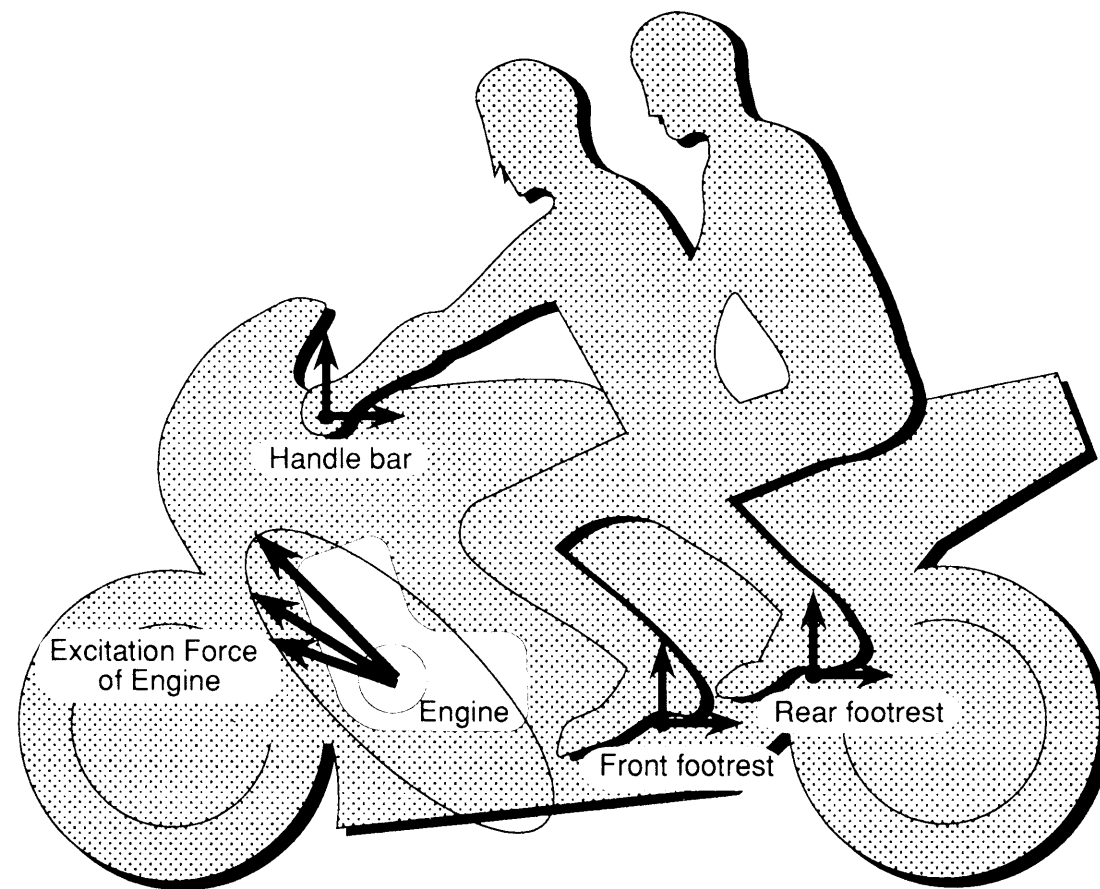


図5-1 二輪車の車体における加振力と応答点

(3) 加振源となるエンジンの使用回転数域が広く、加振周波数が高域に及ぶため、非常に多くの振動モードを対象としなければならない。したがって、特定の固有振動数のシフト、あるいは単一モードだけを対象とした振動応答レベルの低減では目標を達成できない。

以上のような低振動化設計は、まさに5-1節で述べたように多数の応答評価点と複雑な加振条件をもつ設計問題としての特徴を有している。

5-2-2 多目的最適化問題としての定式化

前項の(2)で示したように、エンジンが加振源となって発生する加振力はクランクシャフトの回転にともなってその大きさと方向が変化する。しかし、二輪車にはエンジンは一基だけしか搭載されないため、この周期的な加振力はその発生の位相とは無関係に、それぞれが独立したいくつかの加振力に離散化して取り扱うことが可能となる。具体的には、クランクシャフト1回転(360°)を q 分割し、 q 個の独立した加振力のすべてに対して、それぞれの応答点での振動応答を評価する。

二輪車の車体構造 S において、エンジンによる振動数 ω の加振力 $F(\omega)$ によって引き起こされる各点の加速度 $A(\omega)$ は、イナータンス伝達関数 $R(\omega)$ を用いて以下のように表わされる。

$$A(\omega) = R(\omega) F(\omega) \quad (5-1)$$

ここで、車体構造 S が比例粘性減衰系であるという近似を導入すると、伝達関数 $R(\omega)$ が以下のように表わされることは第3-6節で既に述べた。

$$R(\omega) = \sum_{m=1}^N \left[\frac{[r_m]}{1 - (\omega/\omega_m)^2 - 2j\zeta_m(\omega/\omega_m)} \right] \quad (5-2)$$

$$[r_m] = \frac{\varphi_m \varphi_m^T}{\varphi_m^T M \varphi_m} \quad (5-3)$$

ここで N は全モード数、 ω_m 、 ζ_m 、 φ_m はそれぞれ m 次の固有振動数、減衰比、固有ベクトルであり、 j は虚数単位である。

今、車体構造 S において、独立な q 個の加振力ベクトルに対する、 p 個の応答点での振動応答レベルを低減することが設計目標であるとする。この加振力とそれに対する応

答の組み合わせは、図5-2のように示すことができる。加振力ベクトルを $F_1(\omega)$, $F_2(\omega)$, ..., $F_q(\omega)$ 、加速度応答レベルを $A_{11}(\omega)$, ..., $A_{pq}(\omega)$ とすると、この設計では図5-2に示した加振力と応答の組合せをすべて考慮することが要求される。ただし、 $A_{pq}(\omega)$ は加振力 $F_q(\omega)$ に対する p 点の応答を意味する。

加速度応答レベル $A_{11}(\omega)$, ..., $A_{pq}(\omega)$ は、振動数 ω に依存して変化する。評価すべき加速度応答曲線は $p \times q$ 本である。それらの応答曲線は通常、数多くのピークを持つ。その中には、値が大きく問題になるものもあれば、ピークではあるもののその値が小さく問題にならないものもある。ここで提案する定式化では、このことを考慮するために、まず着目している周波数帯域におけるこの $p \times q$ 本の応答曲線のすべてのうちの最大値を求め、これを A_{\max} とする。そして、

$$A_{\text{th}} = A_{\max} \cdot \varepsilon \quad (0 < \varepsilon < 1) \quad (5-4)$$

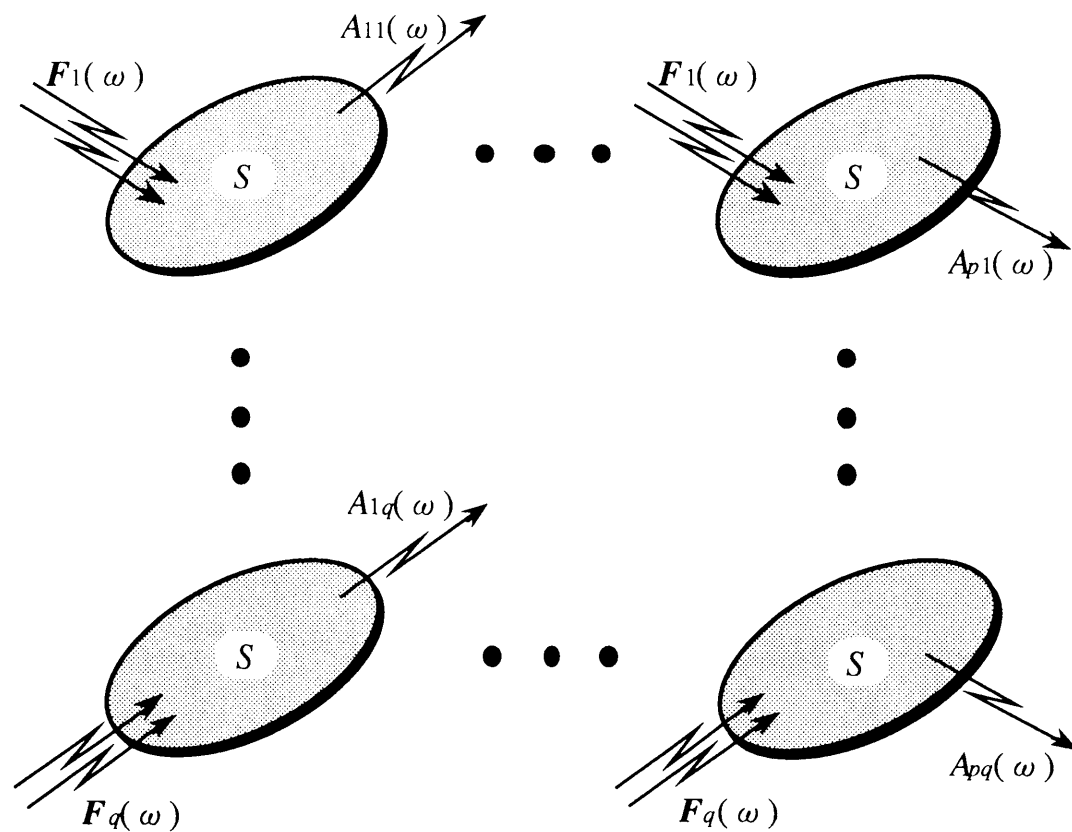


図5-2 多数の加振力と応答点をもつ車体構造モデル

であるような適当な定数 ε で規定される A_{th} を定義し、 A_{th} より大きい値をもつすべての振動応答ピークを低減の対象とする。また車体設計では通常、設計目標は振動低減だけではなく、他にいくつかの要求があることが多い。振動応答レベルを低減するための設計変更にともなって、それら他の設計目標が犠牲になりすぎないように条件が課せられなければならない。以上のことを考慮すると、車体構造の低振動化設計は、以下に示されるように多目的最適化問題の枠組みのなかで設定される。

$$\begin{aligned} \text{目的関数: } f = & \underbrace{(A_{11}^1, \dots, A_{11}^{n_1})}_{(1)}, \dots, \underbrace{(A_{1q}^1, \dots, A_{1q}^{n_q})}_{(2)}, \\ & \underbrace{(A_{p1}^1, \dots, A_{p1}^{n_{p1}})}_{(3)}, \dots, \underbrace{(A_{pq}^1, \dots, A_{pq}^{n_{pq}})}_{(4)} \rightarrow \min \end{aligned} \quad (5-5)$$

$$\text{制約条件: } g_i \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, G) \quad (5-6)$$

ここで、 f は振動応答レベル最小化設計のベクトル目的関数、下線部 (1) は第 1 加振力に対する第 1 応答点のピーク振動応答レベル群、下線部 (2) は第 q 加振力に対する第 1 応答点のピーク振動応答レベル群を表わす。さらに下線部 (3) は第 1 加振力に対する第 p 応答点のピーク振動応答レベル群、また下線部 (4) は第 q 加振力に対する第 p 応答点のピーク振動応答レベル群である。また、 A_{11}^1 や $A_{pq}^{n_{pq}}$ などは振動加速度応答レベルを意味する。第 1 下添字は応答点の番号、第 2 下添字は加振力の番号を示し、上添字は低い振動数から数えた最小化対象の応答ピーク番号である。また g_i は、この最適化問題に付与される評価特性に関する制約や、設計変数の上・下限値に対する制約のうち、第 i 番目の制約条件式を示し、 G は制約条件の総数である。

5-2-3 Minkowski の p 乗距離によるベクトル目的関数のスカラー化

式(5-5)と(5-6)で設定される問題を、一般の多目的最適化問題として考えた場合、その解法は既に数多く提案されている⁽⁴⁸⁾。そのうち、目的関数のスカラー化による方法は最もよく知られたものの一つである。スカラー化は、一般的には次のように行なわれる。まず、最小化したい r 個の目的関数値によって構成される r 次元空間を考え、原点からの距離を次のように定義する。

$$\Phi^p = \left(\sum_{i=1}^r w_i |f_i(\mathbf{x})|^p \right)^{1/p} \quad (5-7)$$

ここで、 $f_i(\mathbf{x})$ は r 個の目的関数のうちの第 i 番目のものであり、 w_i はそれにかかる重み係数である。式(5-7)は、一般化された概念的な距離を表わしており、 Φ^p を Minkowski の p 乗距離と呼ぶ。 $p=1$ および $p=2$ の場合は、それぞれ以下のように表わされる。

$$p=1: \quad \Phi^1 = \sum_{i=1}^r w_i |f_i(\mathbf{x})| \quad (5-8)$$

$$p=2: \quad \Phi^2 = \left(\sum_{i=1}^r w_i |f_i(\mathbf{x})|^2 \right)^{1/2} \quad (5-9)$$

さらに、以下で議論の対象となる Tchebychev ノルムは、Minkowski の距離において $p=\infty$ の場合の呼称である。

$$p=\infty: \quad \Phi^\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^r w_i |f_i(\mathbf{x})|^p \right)^{1/p} \quad (5-10)$$

これらのうち、 $p=1$ の場合は各目的関数の重みつき線形和をとることを表わす。また、 $p=2$ の場合はユークリッド距離となり、重みつき二乗和の平方根である。さて、Minkowski の p 乗距離では、べき数 p の値が大きくなればなるほど、 r 個の要素のうちで $f_i(\mathbf{x})$ の値が大きい要素 i がより大きく評価されることになる。逆に $f_j(\mathbf{x})$ の値が小さい要素 j は p 乗距離 Φ^p にほとんど寄与しなくなる。したがってその極限である $p=\infty$ の場合、Tchebychev ノルム Φ^∞ は、 $1 \leq i \leq r$ である $w_i |f_i(\mathbf{x})|$ のうちの最大値と等しくなり、次のように表現されることになる。

$$p=\infty: \quad \Phi^\infty = \max_{1 \leq i \leq r} (w_i |f_i(\mathbf{x})|) \quad (5-11)$$

5-2-4 Tchebychev ノルムによるスカラー化の効用

ベクトル目的関数のスカラー化にどの関数を用いるかは、基本的には工学的観点から決められるべきである。一般に、実稼働時の機械振動対策は、複数の振動評価点のうちで最悪の評価値をもつ点において、できるだけその値を低減するように進められる。しかし、その振動評価値は、加速度応答レベルそのものではない場合が多い。それは後述のように、設計対象である機械固有の性質に依存して重みづけされるべきものである。しかもこの重みづけは、最も好ましい解が得られるように、設計過程において設計者自身によって変更されることがある。したがって、各目的関数に対する重み付けが設計者の意図をうまく反映できるようなスカラー化が行なわれる必要がある。

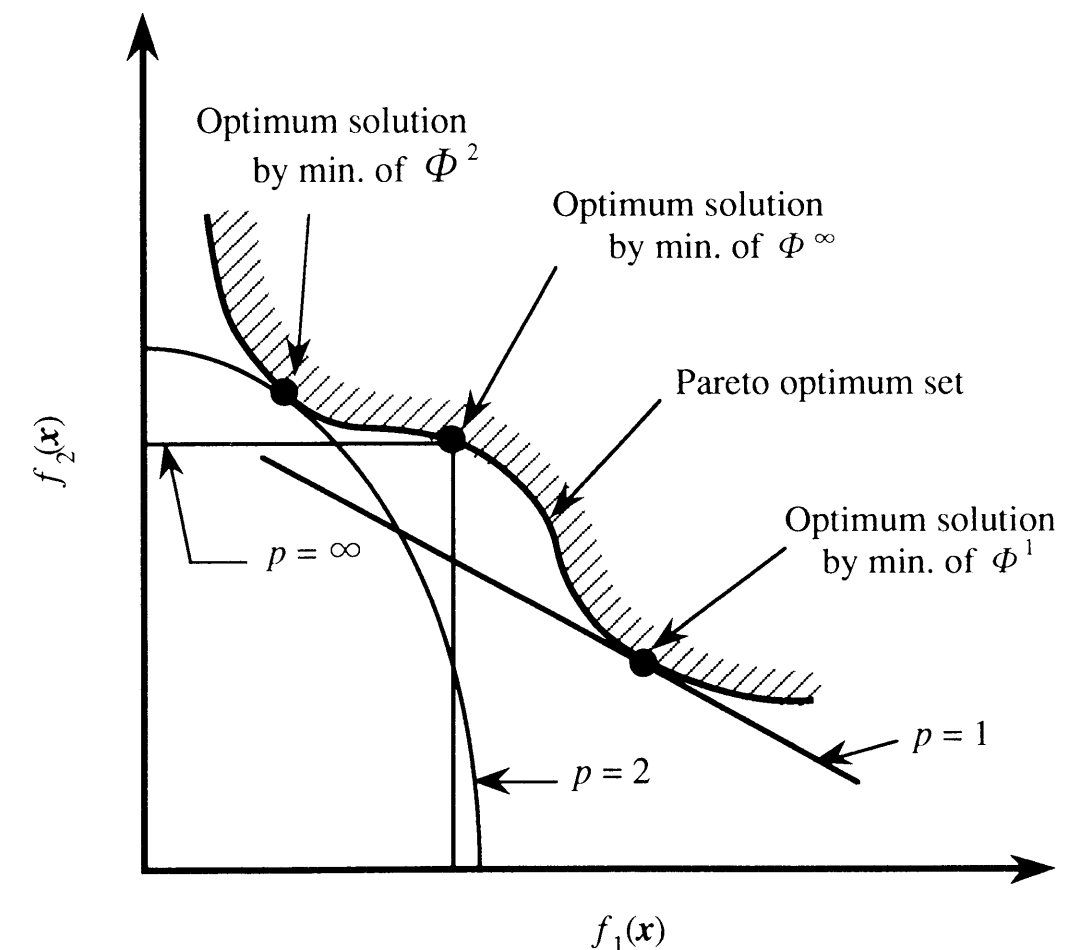


図5-3 Minkowski の p 乗距離最小化によるパレート解生成

多目的最適化問題の解はパレート解と呼ばれる。これは、ある目的関数の値を改善するためには他のいずれかの目的関数の値を犠牲にしなければならないような解である。パレート解は一般に唯一には決まらず、解集合をなす。図5-3に、凸なパレート解曲面に関して、ベクトル目的関数が $f_1(\mathbf{x})$ および $f_2(\mathbf{x})$ からなる二目的問題に対する $p=1$ 、 $p=2$ および $p=\infty$ の定式化によるパレート解生成の様子を示す。二目的問題では、パレート解集合は二次元の目的関数空間において曲線となる。 $p=1$ の重み付きスカラー化を行なってパレート解を求めることは、 $f_1(\mathbf{x})$ および $f_2(\mathbf{x})$ の重み付け線形和を表わす直線とパレート解曲線の接点を見いだすことと等価である。同様に、 $p=2$ の重み付きスカラー化による最適化は、 $f_1(\mathbf{x})$ および $f_2(\mathbf{x})$ の重み付け二乗和を表わす楕円とパレート解曲線の接点を求める問題として表わされる。また、 $p=\infty$ の定式化による最適化の解は、重み付けされた $f_1(\mathbf{x})$ と $f_2(\mathbf{x})$ によって形成される長方形の端点のパレート解曲線と接する点となる。

パレート解曲面が凸な場合には、図5-3に示したように p の値をどのようにとっても、各目的関数に対して与える重みを変化させることによってすべてのパレート解が生成される。すべてのパレート解の生成が可能であるということは、各目的関数の最小化の達成度合が、連続的に調節可能であることを意味する。しかし、パレート解曲面が凸でない場合にはこのことは保証されない。ベクトル目的関数のスカラー化による解法に関する過去の研究によれば、重みつき線形和や重みつき二乗和によるスカラー化では、パレート解集合によって形成される曲面が非凸の場合にはすべてのパレート解を生成することができないが、Tchebychevノルムによるスカラー化では、各目的関数間の重み付けを変えることによってそれが可能となることが明らかにされている⁽⁴⁹⁾。ベクトル目的関数をTchebychevノルムを用いてスカラー化し、最適化問題としてその解を求める手続きは、一般にミニマックス法と呼ばれている。

5-2-5 ミニマックス法による振動低減問題の定式化

前項で述べたことから、式(5-5)と(5-6)で設定される機械振動低減問題に対するスカラー化の方策としてTchebychevノルムを採用することは、すべての加振力に対するすべての評価点の振動加速度応答レベルのうちで最大のものを選んで目的関数とし、それを最小化することを意味する。この場合、各目的関数の重み付けは、それぞれの応答評価点における振動低減の達成度を調節するために行なわれる。このことは具体的には、ある重み付けのもとで得られた最適解に対し、いずれかの評価点における振動応答レベルを

他の評価点を多少犠牲にしてももう少し低減したいという設計要求を満足するべく、重み付けを変更することに相当する。

以上の点を考慮して、OPTSYSでは振動応答レベル最小化設計のベクトル目的関数のスカラー化関数としてTchebychevノルムを採用する。式(5-5)および式(5-6)で設定された多目的最適化問題は、次のように定式化される。

$$\begin{aligned} \text{目的関数： } f = \max & (w_{11}^{-1} A_{11}^{-1}, \dots, w_{11}^{n_{11}} A_{11}^{n_{11}}, \dots, w_{1q}^{-1} A_{1q}^{-1}, \dots, w_{1q}^{n_{1q}} A_{1q}^{n_{1q}}, \\ & w_{p1}^{-1} A_{p1}^{-1}, \dots, w_{p1}^{n_{p1}} A_{p1}^{n_{p1}}, \dots, w_{pq}^{-1} A_{pq}^{-1}, \dots, w_{pq}^{n_{pq}} A_{pq}^{n_{pq}}) \\ & \rightarrow \min \end{aligned} \quad (5-12)$$

$$\text{制約条件： } g_i \leq 0 \quad (i=1,2,\dots,G) \quad (5-13)$$

ここで、 w_{11}^{-1} や $w_{pq}^{n_{pq}}$ などそれぞれの応答値にかける重みである。これらの重みを変更することにより、設計者の意図に応じた最適解を得ることができる。

しかし、式(5-12)と式(5-13)で定式化された最適化問題は、そのまま一般の最適化手法を用いて解くことはできない。それは、式(5-12)で表わされる目的関数は、その一階導関数が不連続であるためである。そのためここでは、以下のように新たなスカラー変数 y を導入し、上の最適化問題を連続な問題へと等価変換する⁽⁵⁰⁾。

$$\text{目的関数： } f = y \quad \rightarrow \min \quad (5-14)$$

$$\text{制約条件： } g_i \leq 0 \quad (i=1,2,\dots,G) \quad (5-15)$$

$$\left. \begin{aligned} w_{11}^{-1} A_{11}^{-1} - y &\leq 0 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ w_{pq}^{n_{pq}} A_{pq}^{n_{pq}} - y &\leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (5-16)$$

この変換により設計変数はこれまでの n 個から新しい変数 y の分が増えて $n+1$ 個となる。制約条件式群(5-16)は、目的関数でもある変数 y よりもそれぞれの振動応答加速度の値が小さいことを要求するため、変数 y が最小化されると同時に応答値も最小化されることになる。

二輪車の車体設計では、振動応答レベル低減の他にも重要な設計目標が存在する。一つは第4章で取り上げたねじりの静コンプライアンスの低減であり、もう一つは車体質量の軽減である。したがって振動応答レベル最小化設計では、以上の二つの設計目標を式(5-15)に相当する制約条件として取り扱う。また、振動応答評価点としてはハンドル、フロントフットレスト、リアフットレストの三点を選ぶ。そしてねじりの静コンプライアンスと車体質量が所期の目標値を満足するという条件のもとで、その三点の評価点での振動応答レベルを低減する。この問題を、式(5-14)から式(5-16)に基づき以下のように定式化する。

$$\text{目的関数： } f = y \quad \rightarrow \quad \min \quad (5-17)$$

$$\text{制約条件： } S_i - S_i^* \leq 0 \quad (5-18)$$

$$M_f - M_f^* \leq 0 \quad (5-19)$$

$$\left. \begin{array}{l} w_{a1}^{-1} A_{a1}^{-1} - y \leq 0 \\ \vdots \\ w_{aq}^{n_{aq}} A_{aq}^{n_{aq}} - y \leq 0 \end{array} \right\} \quad (5-20)$$

$$\left. \begin{array}{l} w_{b1}^{-1} A_{b1}^{-1} - y \leq 0 \\ \vdots \\ w_{bq}^{n_{bq}} A_{bq}^{n_{bq}} - y \leq 0 \end{array} \right\} \quad (5-21)$$

$$\left. \begin{array}{l} w_{c1}^{-1} A_{c1}^{-1} - y \leq 0 \\ \vdots \\ w_{cq}^{n_{cq}} A_{cq}^{n_{cq}} - y \leq 0 \end{array} \right\} \quad (5-22)$$

ここで、 S_i と M_f はそれぞれ、ねじりの静コンプライアンスと車体質量を表わす。 S_i^* と M_f^* はそれぞれの上限值である。また、 A_{a1}^{-1} や $A_{cq}^{n_{cq}}$ などは振動加速度応答レベルを意味する。第1下添字は応答点を示し、 a 、 b 、 c はそれぞれハンドル、フロントフットレスト、リアフットレストである。第2下添字は加振力の番号を示し、上添字は低い振動数から数えた最小化対象の応答ピーク番号である。同様に w_{a1}^{-1} や $w_{cq}^{n_{cq}}$ などはそれぞれ

の応答値にかける重みである。したがって、式(5-20)はすべての加振力に対するハンドルの応答に関連する制約式群である。同様に、式(5-21)はフロントフットレスト、式(5-22)はリアフットレストの応答に関連する制約式群である。

5-3 振動応答レベル最小化設計

5-3-1 設計に用いる構造モデル

本項以降では、前項までに車体設計に関して設定した問題を実際に解くための手段を提示する。

設計の対象とした二輪車の車体はおおむねフレーム構造とみなされる。したがって、構造解析のための有限要素モデルは、図5-4に示すように主としてはり要素を用いて構成される。第4章での静的問題におけるフレームの最適設計では、有限要素モデルとしてモデル化されるのはフレーム部分のみであった。これは、二輪車の車体のうち、フレーム以外の部分がねじりの静コンプライアンスに影響を及ぼすことがないためである。しかし、動的な構造応答に対してはフレーム単体の剛性・質量のみならず、フレームに取り付けられている数多くの部品や艀装品の存在が大きな影響を及ぼす。このため、ここで用いるモデルはそれら艀装品の質量を集中質量で表わし、しゅう動部分をスカラバネ要素でモデル化することによって、実機との対応が十分に吟味された精度の高いものである⁽⁵¹⁾。図5-4では設計変更を行なうフレーム部材は太い実線、設計変更の対象外のフレーム部材は太い点線、それ以外の部分は細い実線で示されている。設計部材としては断面寸法の変更が可能な10本を選択した。それらの部材はすべて図5-4中に示すような円形断面のパイプである。静的問題におけるフレームの最適設計では、断面寸法に関する設計変数としては各部材の直径のみを採用した。これは、静的な最適化では、たとえ肉厚を設計変数に採用しても、結果的に最適値は設定した下限値となることが明らかであるためであった。しかし、動的な最適化においてはこのことは必ずしも成立せず、各部材の直径 ϕ に加えて肉厚 t を設計変数とする。このため、設計変数の総数は20となる。このフレームは進行方向に対してほぼ左右対称の構造であるため、図5-5に示すように左右で対応する部材の直径は同じ設計変数として取り扱う。図中で、同じ設計変数グループに属する部材は同じパターンをもつ線で示されている。

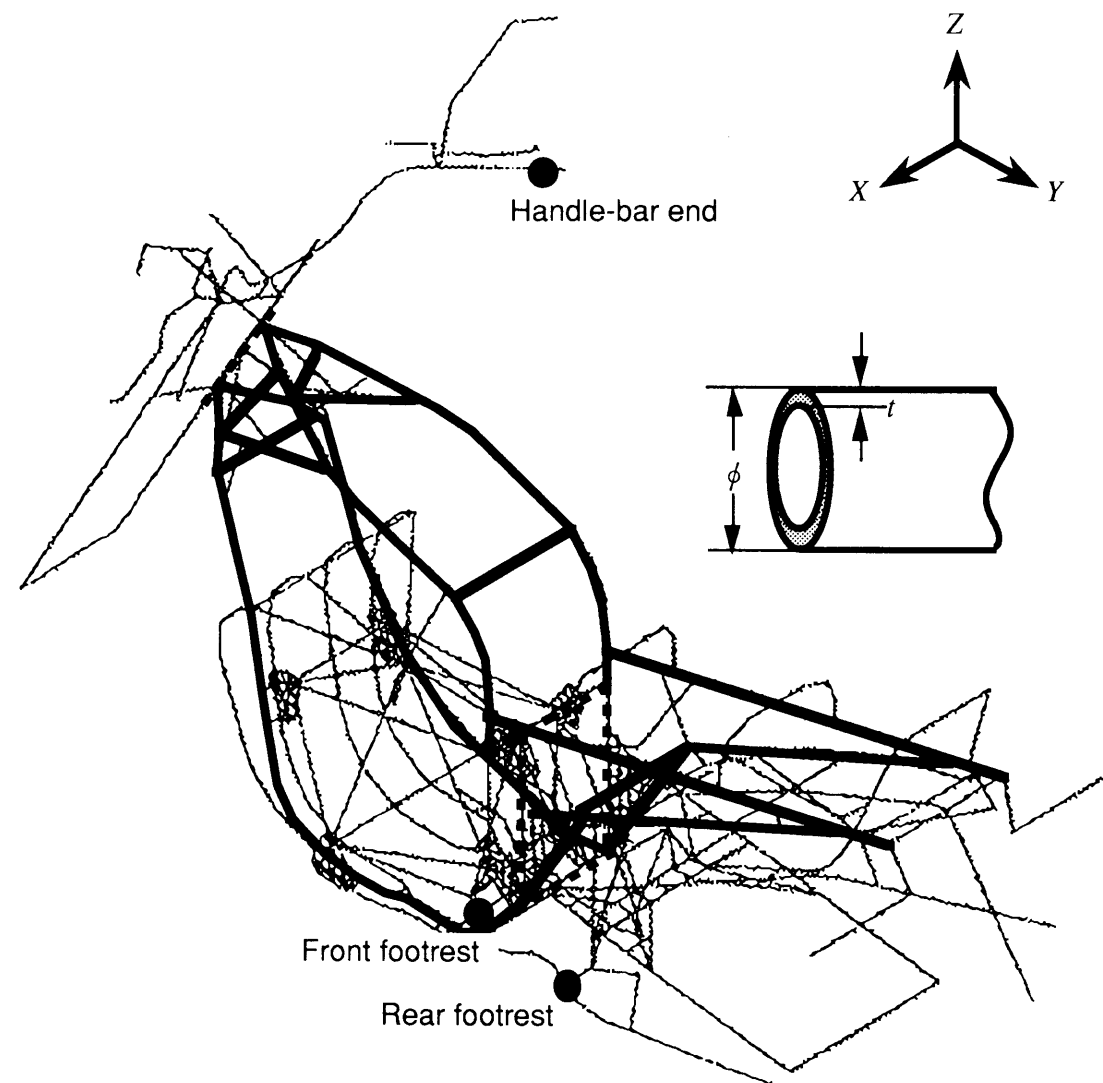
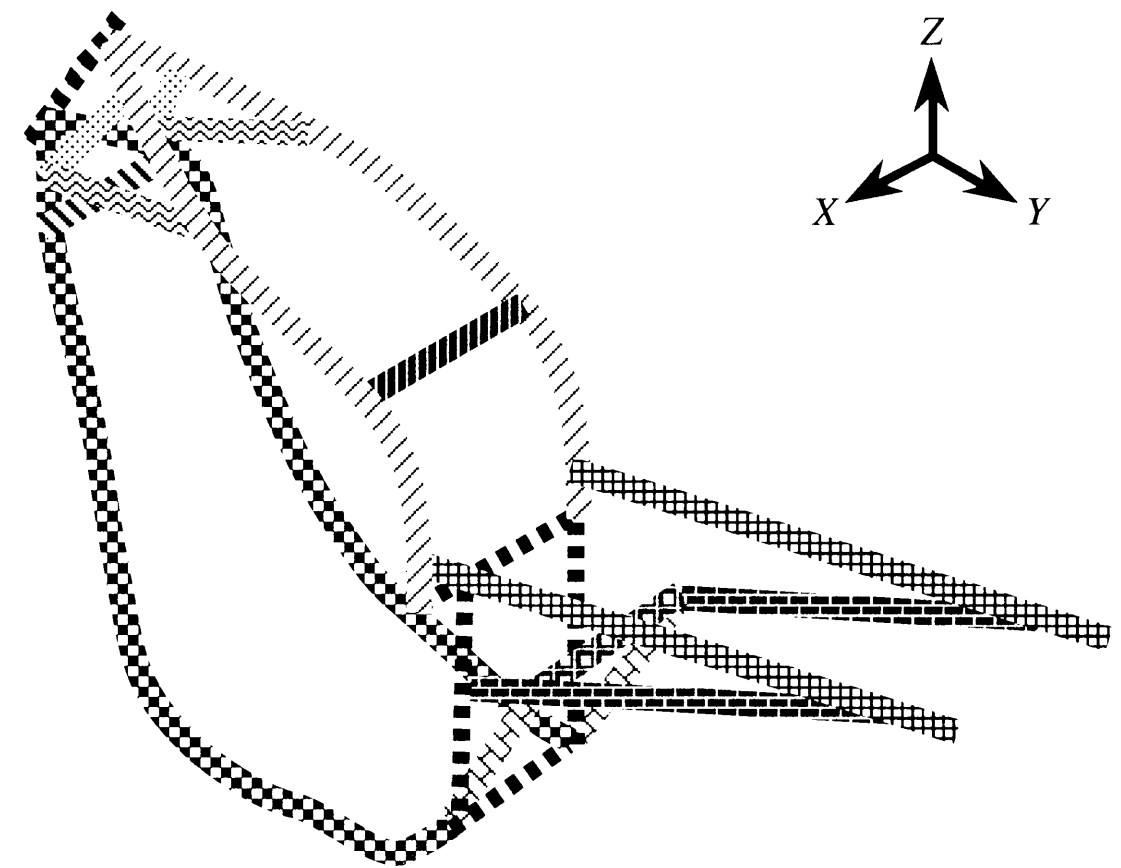


図5-4 二輪車車体の有限要素モデルとフレーム部分









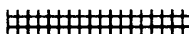



i	Design element number		Frozen element		
	①		⑤		⑨
	②		⑥		⑩
	③		⑦		
	④		⑧		

図5-5 振動応答レベル最小化の設計変数グループ

5-3-2 最適化のための具体的手段

振動応答評価点は、上述したようにハンドル、フロントフットレスト、リアフットレストの三点である。ここまでは、各応答点における振動加速度レベルをスカラー量として取り扱ってきた。しかし実際には、各応答点の x （左右）、 y （前後）、 z （上下）三並進方向の振動成分を考慮しなければならない。ここでは、各点において、次の重み付きノルムでスカラー化して評価する。

$$A = \sqrt{w_x A_x^2 + w_y A_y^2 + w_z A_z^2} \quad (5-23)$$

ここで、 A は振動評価量、 A_x 、 A_y 、 A_z および w_x 、 w_y 、 w_z はそれぞれ x 、 y 、 z 方向の振動加速度応答レベルと重みである。ここでは簡単のため、重みをすべて1とする。応答評価のため式(5-4)で導入したしきい値 ε は0.7とした。

また、応答評価は、単に加速度応答レベルで一律に行なうことはできない。それは、加速度値が同じでも振動周波数が異なると人間の体感量も変化するためである。この問題は、本論文におけるアプローチでは、式(5-20)～(5-22)において導入した重み係数を、振動周波数に依存して変化させることによって解決される。二輪車の体感振動に関しては既に、物理的な加速度値と体感量との間の関係を実験的に定めた等感度曲線が示されている⁽⁵²⁾。ここではその関係を簡単化し、振動周波数の関数としての応答評価の重み係数を以下のように決定する。

$$w = \frac{h^*}{h} \quad (5-24)$$

上式で、 h は着目する振動応答ピークの周波数 [Hz]、 h^* は基準となる周波数 [Hz] である。ここでは、並列4気筒エンジンの10,000 rpm を基準とする。並列4気筒エンジンでは、発生する加振力の二次成分が支配的に大きく⁽⁵³⁾、その10,000 rpm が333Hzに相当することより、

$$h^* = 333 \text{ [Hz]} \quad (5-25)$$

とした。このことは、加速度応答値に対して、基準周波数333 Hzで1となり、周波数 h に反比例するような重み付けをすることを意味する。

さらに、並列4気筒エンジンが発生する加振パターンは、その二次成分の絶対値については、クランクシャフト四分の一回転ごとに繰り返される。すなわち、クランクシャ

フト回転角が0°の時と、90°、180°、270°の時は同じ大きさの加振力が発生する。したがってここでは、クランクシャフト回転角0～80°を8等分して10°おきに9個の独立した加振力を計算して定めた。これは、式(5-17)～式(5-22)によって設定される問題で、

$$q=9 \quad (5-26)$$

とすることである。

また、制約条件であるねじりの静コンプライアンスと車体質量の上限値 S_t^* および M_f^* は、それぞれ以下のように設定した。

$$S_t^* = 1.06 \times 10^{-5} \text{ [rad/Nm}^2\text{]} \quad (5-27)$$

$$M_f^* = 19.6 \text{ [kg]} \quad (5-28)$$

また、設計変数に関する側面制約は、管の直径[mm]と肉厚[mm]のそれぞれに対して次のように設定した。

$$10.0 \leq \phi_i \leq 48.6 \quad (i=1,2,\dots,10) \quad (5-29)$$

$$1.4 \leq t_i \leq 2.8 \quad (i=1,2,\dots,10) \quad (5-30)$$

ここでは、図5-4に示した有限要素モデルを用いて着目する0～300Hzの周波数範囲での振動応答レベルを算出する。この周波数範囲には約100個の固有値が存在するため、計算には多大な時間を要する。したがって、上で具体的に設定された最適化問題を解くための手法としては、一次元探索を行わず速い収束が期待される内接球法を用いた。

5-3-3 最適化の結果

初期設計での各部材寸法を図5-6に示す。また、表5-1には初期設計における各車体特性値を示す。次に図5-7には、0～300Hzの周波数範囲で振動応答レベル最小化を行なった結果得られた各部材寸法を示す。図5-6および図5-7において、それぞれの実線の太さは各部材の直径に対応している。さらに図5-8～図5-10に初期設計でのハンドル、フロントフットレスト、リアフットレストの重み付き振動加速度応答を示す。加速度応答の単位[G]は、重力加速度を意味する。また、図5-11～図5-13に振動応答レベル最小化

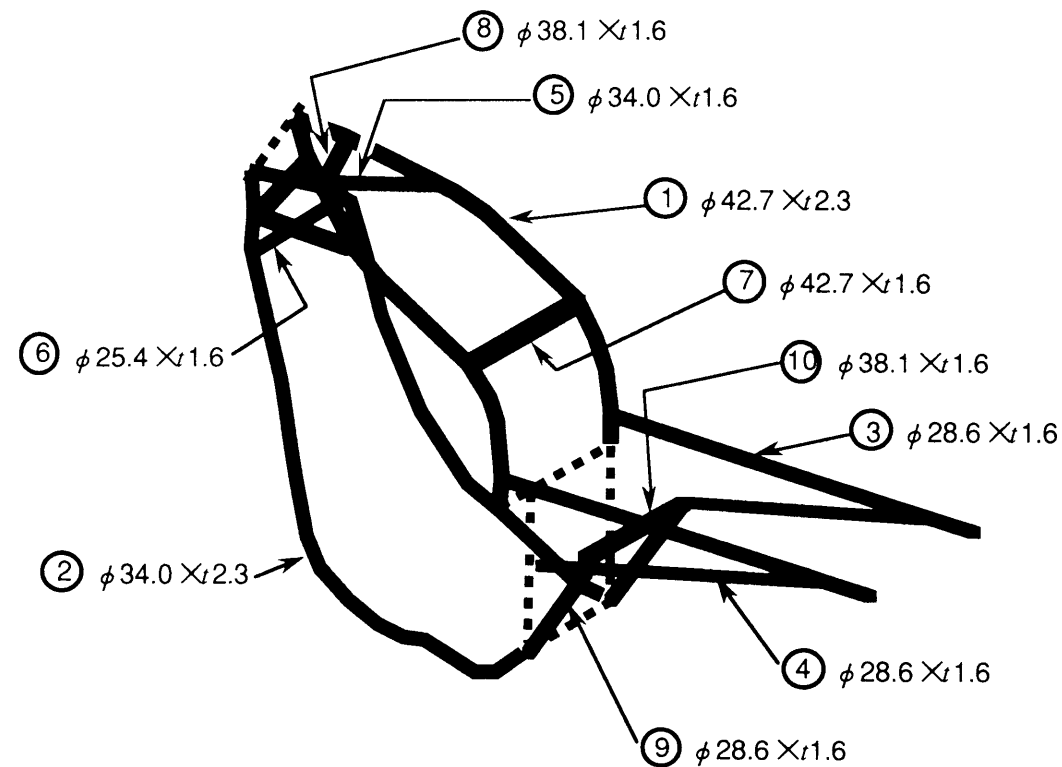


図5-6 初期設計での各部材寸法（ ϕ はパイプの直径、 t はその肉厚を示す。単位は mm ）

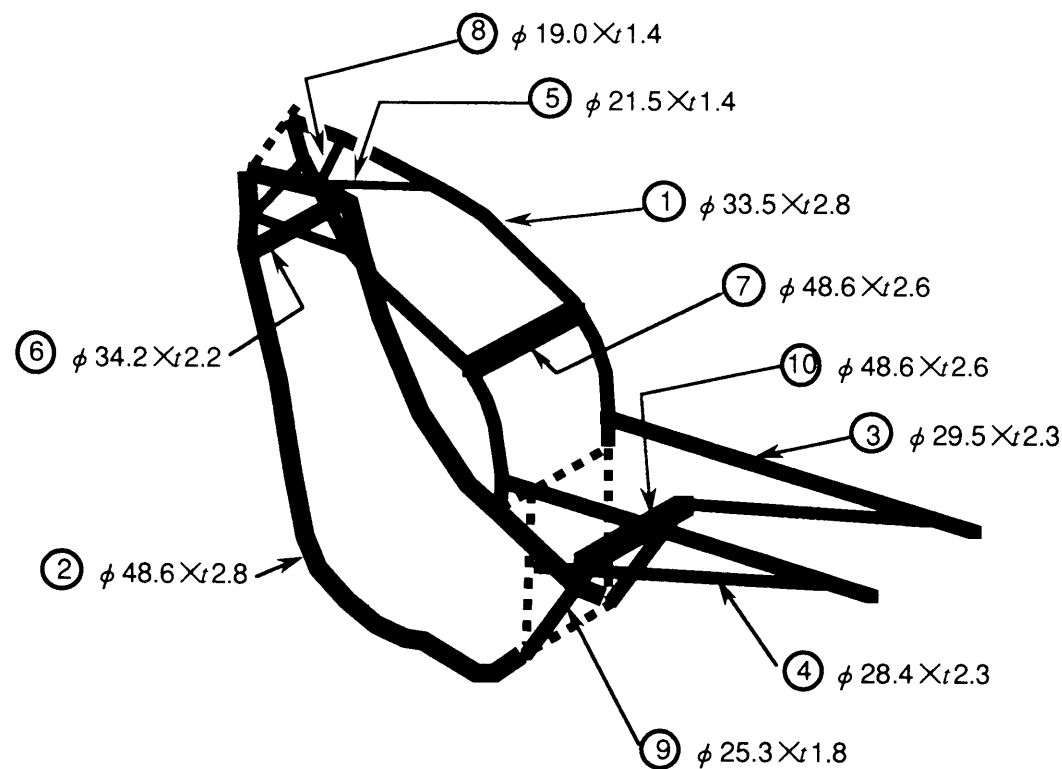


図5-7 最適化後の各部材寸法（単位は mm ）

後の重み付き応答を示す。それぞれの図中では、9個の独立した加振力に対する応答を重ね書きしてある。横軸は周波数であって、 $300Hz$ はエンジン回転数 9000 rpm に相当する。ここでは、減衰比 ξ_m の値はすべて 0.05 として計算した。

表5-1 初期設計の各構造特性値

最大振動応答レベル [G]	静コンプライアンス [rad/Nm ²]	車体質量 [kg]
36.5	9.09×10^{-5}	17.8

まず重み付き応答を見ると、初期設計では図5-8に示すようにハンドルにおいて $220Hz$ 付近で高い応答値が発生しているが、これと比較すると図5-9、図5-10に示すフロントフットレストやリアフットレストの応答は低く、ハンドルの振動だけが際だって大きいことがわかる。これに対し振動応答レベル最小化後は、図5-11に示すようにハンドルでは $220Hz$ 付近のピーク応答値は初期設計にくらべて約30%減少し、 $130Hz$ 付近のピーク応答値もこれに近い値を示していることがわかる。また、図5-13からこれとほぼ同じ応答値がリアフットレストにおいても $160Hz$ 付近で発生しており、途中の過程でこれらのピークが同時に考慮されながら設計が進行したことがわかる。

次に振動レベル最小化設計によって生じた各部材寸法の変化を見ると、図5-6と図5-7に示されているように、部材①のアップパーステューブは初期設計での $\phi 42.7mm \times t2.3mm$ のサイズから $\phi 34.6mm \times t2.3mm$ へと直径が減少した。これとは逆に部材②のダウンステューブは初期設計での $\phi 34.0mm \times t2.3mm$ から $\phi 48.6mm \times t2.8mm$ へと直径、肉厚とも側面制約の上限まで増加した。このことは、アップパーステューブとダウンステューブの寸法に関して、初期設計ではアップパーステューブの方がダウンステューブよりも大きかったのに対し、振動応答レベルが最小化された設計ではそれが逆になっていることを意味する。また、部材③と④のシートレール寸法は $\phi 28.6mm \times t1.6mm$ からそれぞれ $\phi 29.5mm \times t2.3mm$ 、 $\phi 28.4mm \times t2.3mm$ へと単位重量あたりの剛性が低下する方向に変化した。その他の部材で変化の大きかったのはフレーム前端に位置する部材⑤および⑧であり、双方とも直径が約 $20mm$ 減少している。

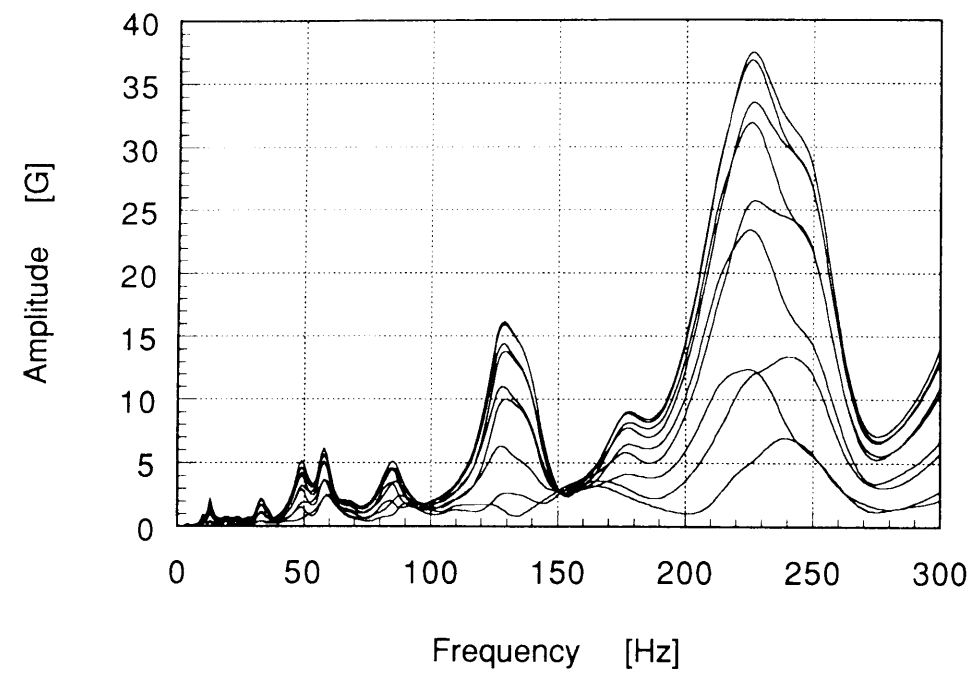


図5-8 ハンドルでの重み付き応答（初期設計）

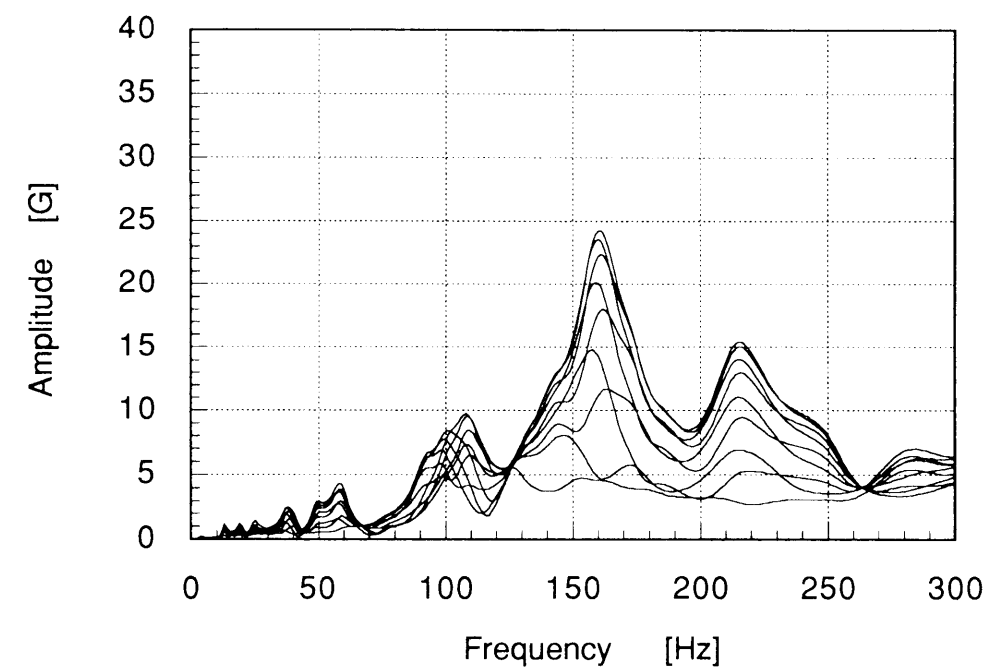


図5-10 リアフットレストでの重み付き応答（初期設計）

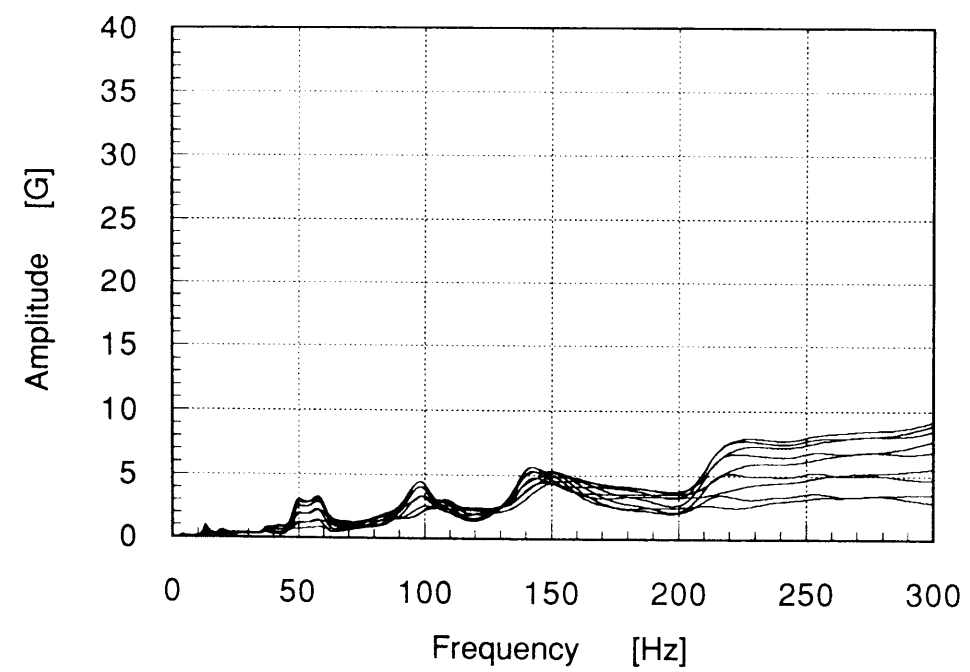


図5-9 フロントフットレストでの重み付き応答（初期設計）

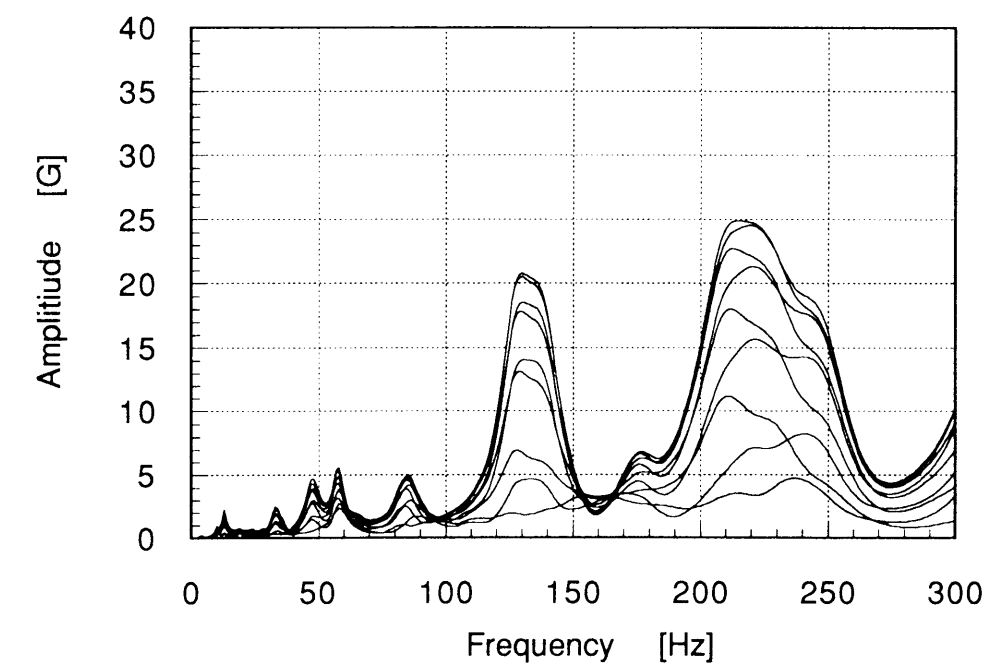


図5-11 ハンドルでの重み付き応答（振動最小化後）

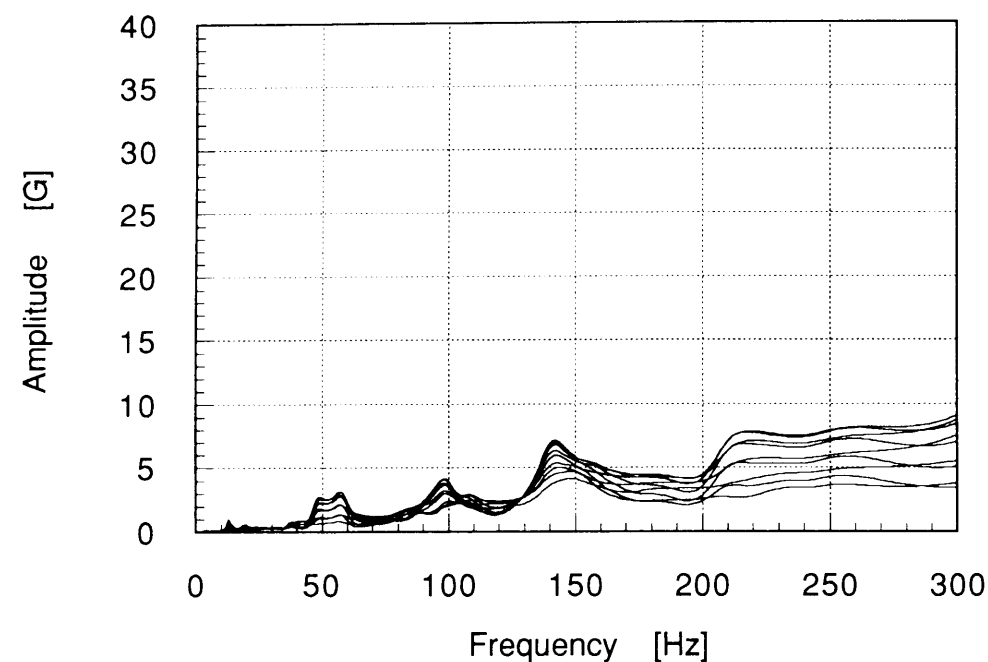


図5-12 フロントフットレストでの重み付き応答（振動最小化後）

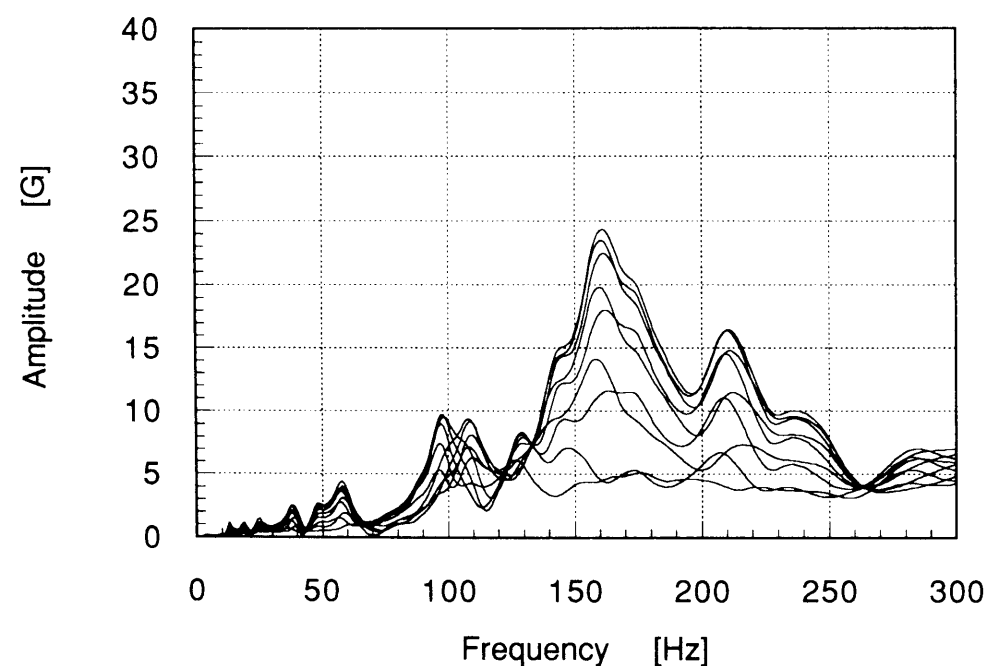


図5-13 リアフットレストでの重み付き応答（振動最小化後）

最適化後の各構造特性値をまとめて表5-2に示す。振動応答レベル最小化設計後のフレームねじり静コンプライアンスの値は 初期設計から24%減少した。逆に質量は7% 増加し、振動特性を改善するために重く剛性の高いフレームとなったことがわかる。

表5-2 最適化後の各構造特性値

最大振動応答レベル [G]	静コンプライアンス [rad/Nm ²]	車体質量 [kg]
25.8	6.94×10^{-6}	19.0

なお、以上の最適化計算に先だって、式(5-14)から式(5-16)で表わされる定式化を採用せず、式(5-12)と式(5-13)によって定義される目的関数と制約条件をそのままの形で採用した計算を行なった。その結果は、初期設計からほとんど重みつき振動応答レベルが改善されないまま探索が停止した。初期設計におけるハンドル部分での応答最大値付近では、複数の加振力による応答が競合しあっているため、一次元探索の過程での小さな設計変更によっても、それまでとは異なる加振力が最大応答をもたらすように変化してしまう。このことが、目的関数の導関数の不連続性を招き、最適解の探索を停止させる原因であると考えられる。

5-3-4 応答評価点への重み付けの変更による最適化達成度の調節

5-2節において、ベクトル目的関数のスカラー化の方策として Tchebychev ノルムを採用することにより、各目的関数への重み付けの変更によってすべてのパレート解を生成できるようになることを述べた。このことを二輪車の車体設計に関連させて言い換えると次のようになる。すなわち、車体各部の振動応答レベルの線形和や二乗和で構成された目的関数を用いた最適化では、重み付けの変更によって振動レベルの低減度合を連続的に調節できることが保証されていないのに対し、ミニマックス問題としての定式化、すなわち Tchebychev ノルムによって構成された目的関数の最小化ではそれが理論的に可能である。

したがって本項では、前項の振動応答レベル最小化設計の結果を受けて、ハンドル、フロントフットレスト、リアフットレストのそれぞれの応答評価点への重み付けを変更

することにより、各点での振動応答レベルの最小化の達成度を調節することを試みる。

前項の最適化では、ハンドルで発生する振動応答レベルとリアフットレストで発生する振動応答レベルとの間でコンフリクトが生じて探索が終了した。各応答評価点への重みはすべて 1.0 であった。そのためここでは、ハンドルの振動をもう少し低減することを目的としてその重みを次のように変更する。

$$\begin{aligned}w_a &= 1.1 \\w_b &= w_c = 0.9\end{aligned}$$

その他の条件はすべて前項と等しくして再度最適化を実行した結果得られた振動応答波形を図5-14から図5-16に示す。また、得られたフレームの各部材寸法を図5-17に示す。

図5-14を図5-11と比較すると、振動応答レベルに対する重みを増加させることにより、ハンドルでの応答の最大値は 25.8G から 23.5G へと約10%低減されたことがわかる。これとは逆に、図5-16と図5-13から、振動応答レベルに対する重みを減少させたリアフットレストでは、応答の最大値は 24.9G から 28.5G へと約14%悪化したことがわかる。このことは、ハンドルでの振動レベルを低減するために、リアフットレストでの振動低減という設計目標が犠牲にされたことを意味する。また、図5-17を図5-7と比較すると、部材寸法に関しては、重み付けを変化させることにより、シートレール部材③の直径が 29.5mm から37.6mm へと増大し、同時に肉厚も増加したのとは逆に、シートレール下部の部材④および⑨はその直径を大きく減少させられていることが注目される。

以上のように、ミニマックス問題として定式化された二輪車フレームの振動応答レベル最小化設計では、重み付けの変更により車体各部に発生する振動のレベルを低減する度合いを調節できることが確認された。表5-3には重み付け変更後の最適化によって得られた各車体構造特性値を示した。

表5-3 重み付け変更による最適化後の各構造特性値

最大振動応答レベル [G]	静コンプライアンス [rad/Nm ²]	車体質量 [kg]
ハンドル : 23.5 F&Rフットレスト : 28.5	6.94×10 ⁻⁶	19.0

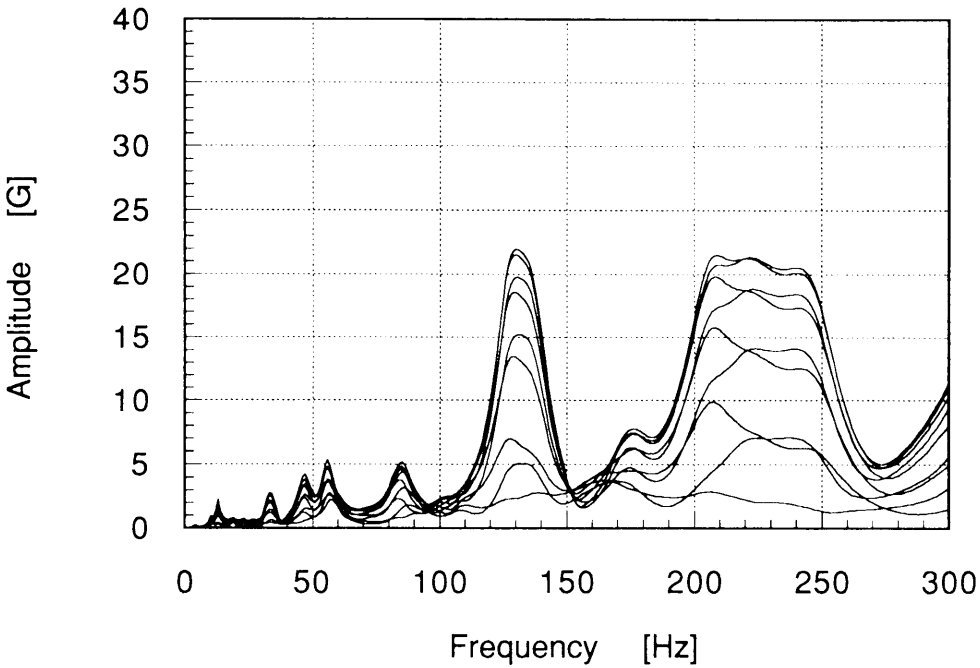


図5-14 ハンドルでの重み付き応答（重み付け変更後）

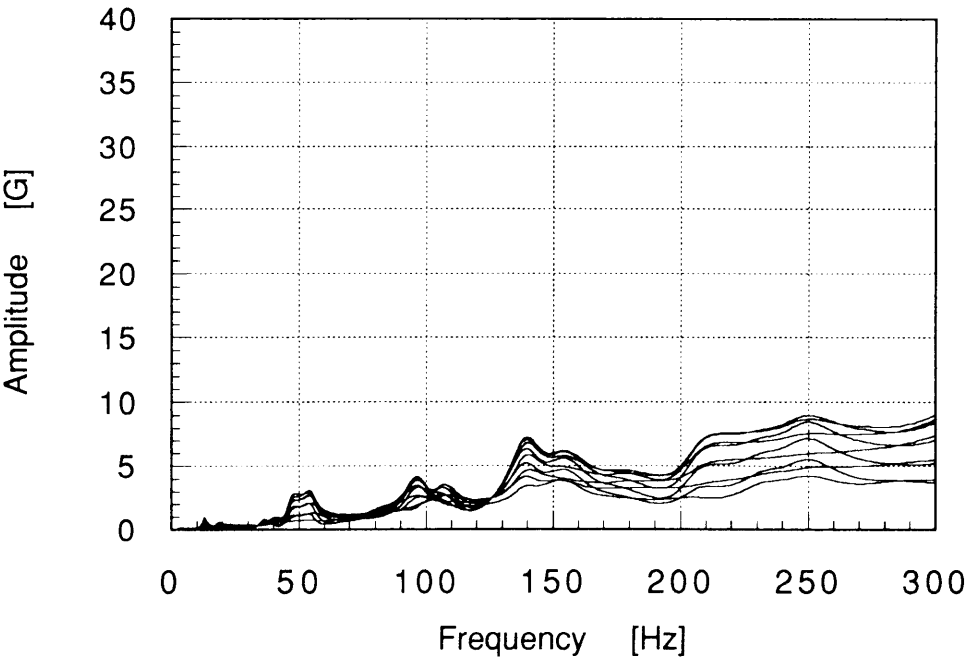


図5-15 フロントフットレストでの重み付き応答（重み付け変更後）

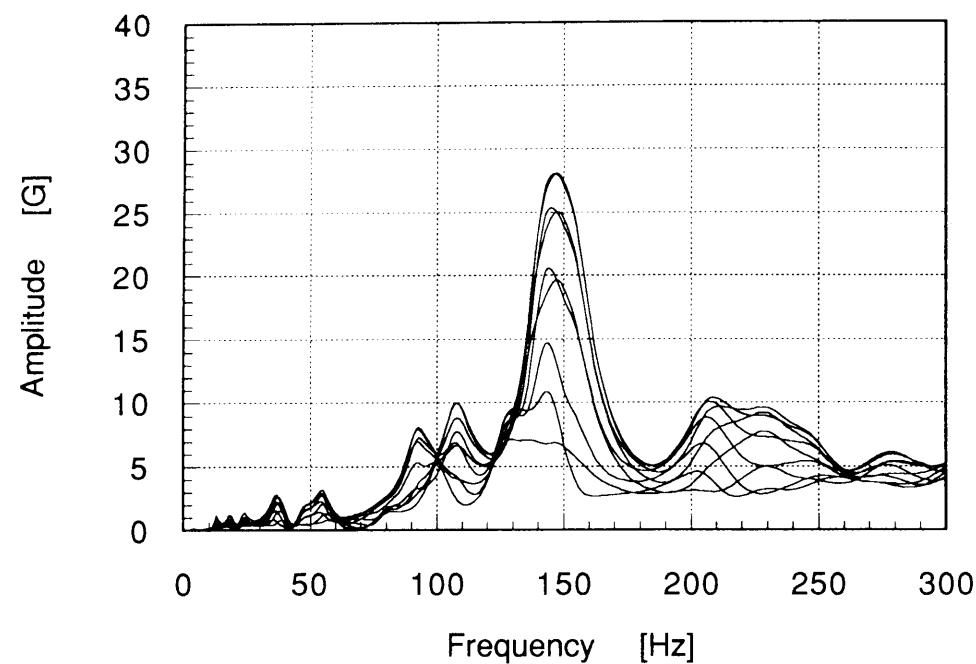


図5-16 リアフットレストでの重み付き応答（重み付け変更後）

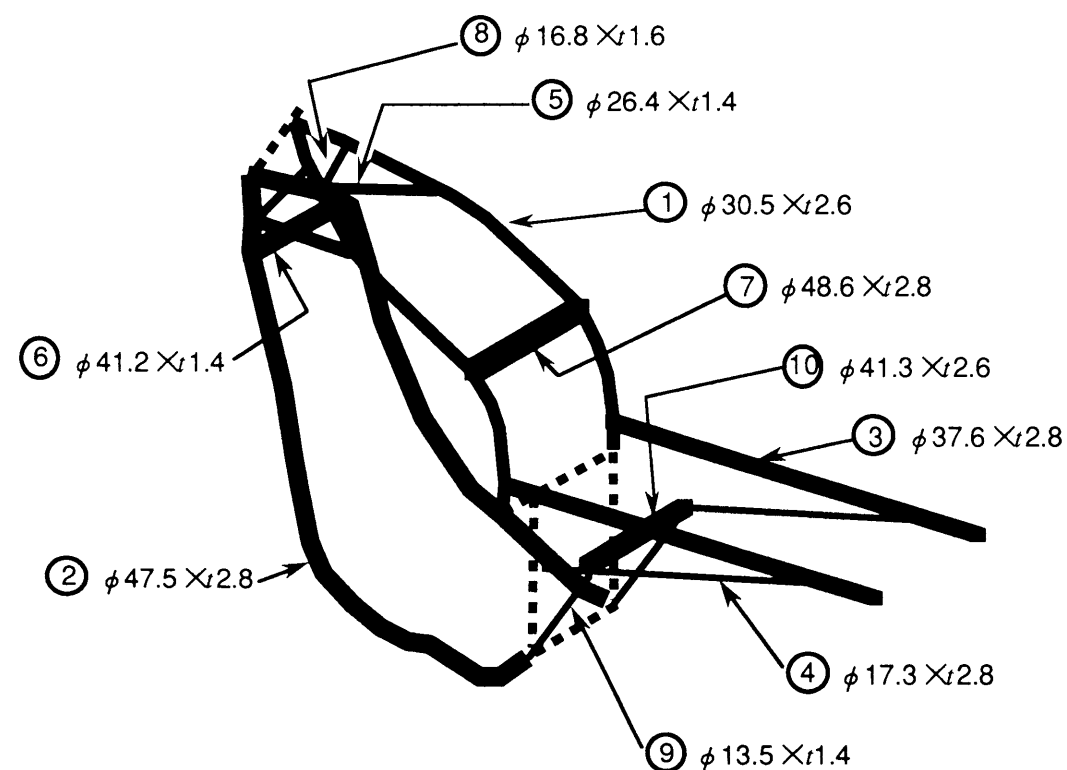


図5-17 評価点への重み付け変更後の最適化による各部材寸法（単位はmm）

5-4 結 言

本章では、最適構造設計システム OPTSYS による動的問題を対象とした最適設計法について検討した。ここで得られた知見は以下のようにまとめられる。

(1) 多数の強制加振力を受け、しかも多数の応答評価点で多数の振動モードに対する対策が必要となる一般の機械構造物の振動低減問題が、多目的最適化問題として定式化できることを示した。

(2) 提示された多目的最適化問題に対して、ミニマックス法による解法の手順を示した。また、それが工学的見地からも数学的取り扱いの上からも適切であることを示した。

(3) 具体的な設計事例として自動二輪車の車体設計を取りあげ、エンジンによって加振される車体のハンドル、フロントフットレスト、リアフットレストにおける低振動化設計の定式化と解法を提示した。

(4) その結果、与えた条件を満足しながら、最大振動加速度レベルが初期設計と比較して約 30 % 低減された車体構造が得られた。

(5) さらに、応答評価点の間で重み付けを変更して最適化を再度実行したところ、所期の達成度の調節が可能であることが確認された。

(6) 実際に設計に用いられる詳細な有限要素モデルにおける問題設定に対して良好な最適解が得られたことから、動的な最適構造設計に関して本章で提示した一連の手続きが有効であることが実証された。

第6章 機械構造物の多目的最適設計

6-1 緒言

本論文ではこれまで、第4章においてはフレーム構造物の質量とねじりの静コンプライアンスを目的関数とし、また第5章では強制加振下で発生する振動応答レベルを目的関数とした最適設計に関して考察を行ってきた。すなわち以上の各章では、最適性の基準として単一の評価要因のみを設定し、その他のものはすべて制約条件としてきたことになる。

しかし、第2章の冒頭でも述べたように、機械設計において多数の候補の中からただ一つを選んで設計解とするための基準としては様々なものを考えることができる。ここで現実の機械構造設計に目を向けてみると、設計過程においては、機械構造の性能、機能、費用などに関わる多数の評価要因の複雑な相互関係を解明しつつ、それらを最小化、あるいは最大化するという目標を達成することが要求される場合が少なくない。このような多数の目標をもつ設計問題を数理的手法を用いて解こうとする場合に、構造質量などの単一の評価要因のみを目的関数とし、他の評価要因を制約条件とする取り扱いでは、設計者自身がそれらの評価要因間の相互関係を十分に把握し解明できず、結果的に最適な設計の達成が保証されないことが多い。したがって、このような設計問題を解くためには、複数の目的関数を最適化するための多目的最適化手法が適用されなければならない。一般に、多目的最適化問題は次のように定式化される最適化問題を指す。

$$\left. \begin{array}{l} \text{目的関数: } s(\mathbf{x}) = \{s_1(\mathbf{x}), s_2(\mathbf{x}), \dots, s_r(\mathbf{x})\} \rightarrow \min \\ \text{制約条件: } g_j \leq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m) \\ \quad \quad \quad x_i^L \leq x_i \leq x_i^U \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ \text{設計変数: } \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array} \right\} \quad (6-1)$$

多目的最適化問題のスカラー化目的関数による解法に関しては、本論文でも第4章で既に、振動応答レベル最小化問題のミニマックス問題としての定式化を行なった際に取り上げた。しかし振動応答レベル最小化問題のベクトル目的関数は、すべて加速度振幅という同じ次元を持ち、単一の尺度で評価されるという特殊性を有しているため、上述したような一般の機械構造設計問題とは一線を画して捉える必要がある。

過去に報告されている多目的計画手法の機械構造設計への適用例としては、以下のよ

うなものを挙げることができる。すなわち、設計目標が競合する問題におけるトレード・オフ関係を動圧ジャーナル軸受の設計を例として明らかにした研究⁽⁵⁴⁾、多目的問題における一つの妥協解を求める方法を工作機械の歯車装置に適用した研究⁽⁵⁵⁾、 ϵ -制約式法を簡単なトラス構造に適用した例⁽⁵⁶⁾、計算機援用対話形システムを構築してディーゼルエンジンの多目的最適化を行なった例⁽⁵⁷⁾、カム装置の最適設計を多目的ミニマックス計画問題として定式化しその解法を示した研究⁽⁵⁸⁾などである。このほか、工作機械主軸系を対象に多目的関数のパレート最適解を求めた研究⁽⁵⁹⁾、さらに製品設計と工程設計の両方を含む統合的設計過程を多目的最適化問題として定式化した研究⁽⁶⁰⁾なども挙げられる。

以上の諸研究では、多目的最適化問題の解法として、目標の相互関係について重みづけなど何らかの評価規範を導入したのち単一目的最適化手法を適用するか、あるいは設計者のもつ局所的な選好情報を対話的に引き出して現実的な選好解を得る、などの手法が用いられてきた。しかし、実際の機械設計においては、設計者が目的関数相互の重要さの度合いを重み付けできたり、あるいはトレードオフ比を明確に与えるという状況は極めて稀であり、そのような情報が得られるという前提に基づく多目的最適化手法は多くの場合適用が困難である。さらに、後述のように機械構造設計における目標は一般的に二つの明確に分類される類型的特質をもち、またそれらの間には優先順位が存在することが多い。このため、数値的な最適化に先だって設計者はそれぞれの設計目標の特質とそれらの間に存在する優先順位に対して注意深く洞察を加え、それらに応じた取り扱いをする必要がある。そしてその結果が現実の設計手順に反映されなければ、最適な設計に到達することは不可能であるのに対し、従来の方法ではその合理的な取り扱いが困難であった。

本章では、上記の問題を解決するために、Haimes等によって提案された ϵ -制約式法に基礎をおき、これを機械構造設計に固有な問題として一般的に存在する目標間の優先性の特質を考慮して再構築した「プライオリティランキング政策」を提案する。さらに、この手法の実際的设计への応用例として三つの設計目標をもつ自動二輪車の車体設計をとりあげ、設計目標の優先性が最適化結果に合理的に反映され得るか否かの観点から本手法の有効性を検討する。

6-2 機械設計における構造設計目標の分類

いま、機械構造設計の一例として内燃機関のクランク軸の設計を考えてみる。この場合の主な設計目標としては、疲労強度の増大、ねじり振動の発生防止、質量および軸回り慣性モーメントの軽減、回転不均衡量の低減、騒音レベルの低減などが挙げられる。このうち、疲労強度の不足とねじり振動の発生は、クランク軸系の破損、ひいては機関全体の破壊という極めて重大な事態をひきおこすため、絶対に避けなければならない。要求される強度は機関の最高回転数や所期の寿命により異なるが、設計計画の初期段階で明確化されるものである。他方、質量、軸回り慣性モーメント、回転不均衡量、騒音レベルなどは、機関の応答性、操作性の良さ、あるいは操作者を含む周辺環境に及ぼす物理的影響度と関わり、かつ計画段階でそれらの間に優先順位が付されるものの、直接致命的な危険と結びつく要因ではない。現実の設計の流れにおいては、これらの量の相互の関連性を把握しつつ弾力的に現状からの改善が図られる。

上述の例を一般化すると、以下のように言うことができる。すなわち、一般に構造設計には多数の設計目標が存在し、それらの間には次のような二種類の優先順位が存在する。一つは優先順位の高い目標であり、構造物の形状や形態の保持、あるいはその安全性や安定性などにかかわるものを指す。それらは構造の有すべき特性として、他のいかなる設計目標の犠牲を払っても満足しなければならない最優先事項であり、通常あらかじめ確定された目標値をもつ。もう一つは優先順位の低い目標であり、それは工業製品としての品位やその利便性、快適性を決定する。その目標値は設計初期段階で暫定的

表6-1 機械構造設計目標の属性

要 求 目 標		希 求 目 標	
目標の優先性	高い	目標の優先性	低い
目標値の設定	厳密	目標値の設定	あいまい
・ 使用者の安全性の確保		・ 設計・製造コストの低減	
・ 機械構造自身の 破壊・破損の防止		・ 機能の高級化	
		・ 快適性の向上	
・ 周辺環境の保護		・ 工業製品としての	
・ 法的規制のクリア		視覚的品位の確保	
・ その他		・ その他	

に設定されるものの、優先順位の高い目標の達成度のいかんによっては変更される可能性もある。本論文では以下、前者の目標を” 要求目標 (Hard objective)”、後者の目標を” 希求目標 (Soft objective)” と呼ぶ。表6-1に、これら二種類の目標の属性として挙げられるものをまとめて示す。

6-3 プライオリティランキング政策の提案

6-3-1 従来の多目的最適化手法の問題点

6-1節でも述べたように、多目的計画問題に対しては既に種々の解法が提案されている。それらのうち、ベクトル目的関数のスカラー化によるパレート解の生成法については前章で触れた。そこで振動応答レベル最小化設計を定式化するために用いた重み付きミニマックス法は、パレート解曲面が非凸な場合にもすべてのパレート解を生成できる優れた方法であることも既に述べた。

しかし、ミニマックス法によっても、前述のような設計目標の階層が想定される場合、それらの質的な優先性の相違を明確に考慮することは困難である。また、目標に階層を設定しない場合でも、それぞれの目的関数に対する重み付けをもって最適化の達成度を調節することは現実には難しい。というのは、振動応答レベル最小化などのように、元来同じ次元をもつ量がベクトル目的関数を構成する場合は例外として、剛性・質量・振動レベルなどの次元の異なる構造応答を考慮する必要のある場合、その重み付けと目的関数値の改善度との間に明確な定量的関係を同定することは困難なためであり、また目的関数値の適正な正規化の仕方などに有力な指針が無いためでもある。この困難は、設計変数に対するそれぞれの構造応答の非線形性が全く異なること、初期設計の時点での各目標の達成度が異なること、などに起因すると考えられる。

これに対し、設計目標間に存在する優先順位を想定した方法としては、目標計画法^{(61),(62)}がある。目標計画法は、式(6-1)の各目的関数の目標値 $\hat{s}_1, \hat{s}_2, \dots, \hat{s}_r$ と、実際に達成される目的関数値の間の Minkowski のp 乗距離を最小化することを目的とする。目標計画法では、式(6-1)で表わされる多目的最適化問題に対して以下のような定式化を行なう。

$$\left. \begin{aligned} \text{目的関数: } z &= \sum_{k=1}^r P_i (w_i^+ d_i^+ + w_i^- d_i^-) \rightarrow \min \\ \text{制約条件: } s_i(\mathbf{x}) + d_i^- - d_i^+ &= \hat{s}_i \quad (i = 1, 2, \dots, r) \\ g_j &\leq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m) \\ x_k^L &\leq x_k \leq x_k^U \quad (k = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \tag{6-2}$$

ここで、 d_i^+ 、 d_i^- はそれぞれ i 番目の目標値に対する超過達成度と不足達成度を表わす変数であり、 w_i^+ 、 w_i^- はそれらに付される重みである。また、絶対順位係数 P_i はアルキメデス数とも呼ばれ、 P_i と P_j とを較べて、もし $i < j$ ならば、どのような自然数 N をもってきても $P_i < NP_j$ とはならないような数である。しかし、設計目標の優先順位を表わすこの絶対順位係数 P_i を数値的にプログラムすることが困難であること、また、目標計画法においても重み付けと各設計目標の達成度の定量関係が明確でないことには変わりがないこと、などの理由から、実際問題に適用する際には欠点が多いと考えられる。したがって、以上のような目標間に優先順位が存在するような設計問題に対しては、新しい多目的最適化の手続きを構築することが必要となる。

6-3-2 プライオリティランキング政策の実行手順

ここで提案するプライオリティランキング政策（Priority Ranking Strategy, 以下 PRS と略称）は、 ϵ -制約式手法にその基礎を置いている。 ϵ -制約式手法は、以下のように r 個の目的関数のうちの第 l 番目のものだけを単一の目的関数とし、残りを上限値 ϵ_i ($i=1,2,\dots,r$, $i \neq l$) である制約条件として取り扱うスカラー化手法である。

$$\left. \begin{array}{l} \text{目的関数: } s_l(\mathbf{x}) \rightarrow \min \\ \text{制約条件: } s_i(\mathbf{x}) \leq \epsilon_i \quad (i=1,2,\dots,r) \\ \qquad \qquad g_j \leq 0 \quad (j=1,2,\dots,m) \\ \qquad \qquad x_k^L \leq x_k \leq x_k^U \quad (k=1,2,\dots,n) \end{array} \right\}$$

}

(6-3)

ϵ -制約式手法では、制約値 ϵ_i の変更により、目的関数空間の凸性を仮定することなくすべてのパレート解が生成できることが証明されている⁽⁶³⁾。この手法を実際の問題解決に適用しようとする場合、最初は制約を甘く（すなわち、 ϵ_i の値を大きく）設定し、その後、選ばれた目的関数の最小化の程度を考慮しつつ、次第に ϵ_i の値を小さく（制約の設定を厳しく）していくような手順が採られる。

しかしこの方法には、ある制約値 ϵ_i を ϵ_i' と変化させた場合、目的関数の最小値がどの程度変化するかが明確でないという欠点がある。また、 ϵ -制約式手法を工学設計に適用する際にさらに問題となる点は、 r 個の目的関数のうちのどれを目的関数に選べば良いのかという方法論的指針を一切持たないことである。

以上の点を踏まえ、PRS ではまず図6-1に示すように、 r 個の設計目標を前節で言及し

た優先上の性質の違いに着目して要求目標と希求目標に分け、それぞれに対して達成の水準を設定する。ここでは、要求目標に対する水準を要求水準（Hard-objective level）、希求目標に対する水準を希求水準（Soft-objective level）と呼ぶ。そして、両目標の中においても達成度の優先順位を設定し、優先順位の高いものから順に単一目的の最適化を繰り返し実行していく。そして、各単一目的最適化段階にそれ以前の段階で最適化された目標の最適値からの偏差の許容値を設計者が対話的に設定し、目標値のその許容偏差の範囲内での改悪を許すことで、各目的関数の達成度の調節を図る。こうして構築された PRS の実行手順 [1]~[9] を、以下に示す。

[1] 最小化の望まれる全部で r 個の目的関数 $s_1(\mathbf{x}), s_2(\mathbf{x}), \dots, s_r(\mathbf{x})$ を、 l 個の要求目標に対する目的関数 $F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), \dots, F_l(\mathbf{x})$ と m 個の希求目標 $f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})$ に分類する。ここで $r = l + m$ であり、またそれぞれの目標中では下添数字の小さいものほど優先順位が高いものとする。これらの目標に対して

要求水準ベクトル $\mathbf{F}^+ = (F_1^+, F_2^+, \dots, F_l^+)$

希求水準ベクトル $\mathbf{f}^+ = (f_1^+, f_2^+, \dots, f_m^+)$

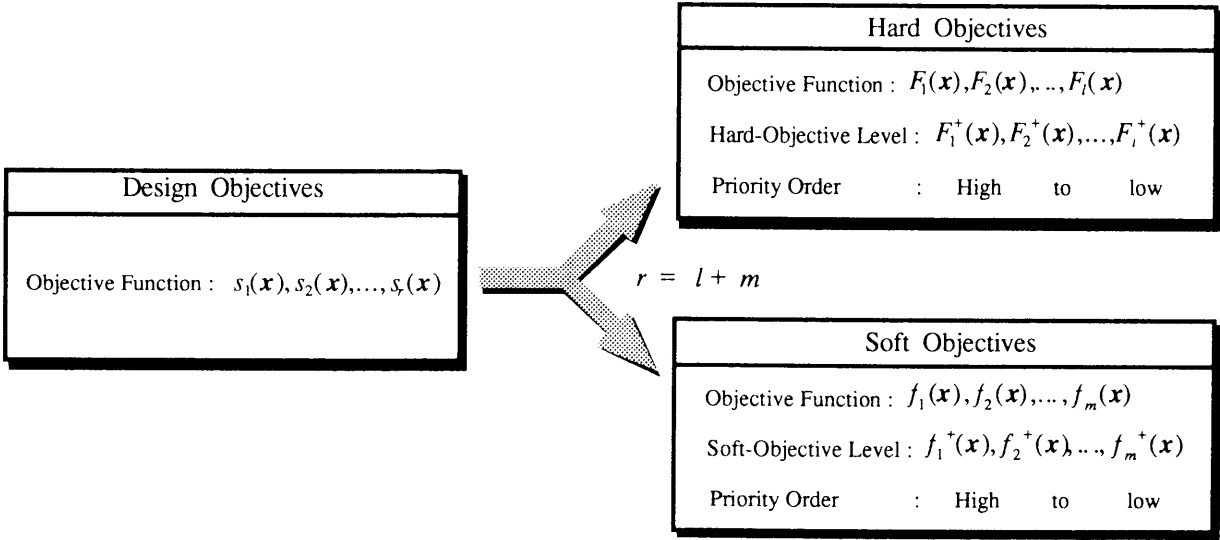


図6-1 構造設計目標の分類

を設定する。これら二種類の水準ベクトルは、いずれも最低限達成されるべきであると
考えられる水準を示すものである。しかし、以下に述べるように希求水準ベクトルにつ
いては、各段階での要求目標の達成の状況に応じて対話的に緩和される可能性がある。

[2] 次の問題を解き、最も優先順位の高い要求目標に対する目的関数 $F_1(\mathbf{x})$ に関して
最小値 F_1^* を得る。

$$\begin{aligned} \text{目的関数: } & F_1(\mathbf{x}) \rightarrow \min \\ \text{制約条件: } & F_i(\mathbf{x}) \leq F_i^+ \quad i = 2, 3, \dots, l \\ & f_j(\mathbf{x}) \leq f_j^+ \quad j = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

[3] $F_1^* > F_1^+$ のとき、すなわち目的関数 $F_1(\mathbf{x})$ の最小値が要求水準を満足しない場合は、
設計者が希求水準 \mathbf{f}^+ の設定を緩和して[2]に戻る。

[4] $F_1(\mathbf{x})$ の最小値が要求水準を満足する範囲内での改悪許容限度として偏差 Δ_1 ($0 \leq$
 $\Delta_1 \leq F_1^+ - F_1^*$) を設定して次の問題を解き、二番目に優先順位の高い要求目標に対する
目的関数 $F_2(\mathbf{x})$ に関して最小値 F_2^* を得る。

$$\begin{aligned} \text{目的関数: } & F_2(\mathbf{x}) \rightarrow \min \\ \text{制約条件: } & F_1(\mathbf{x}) \leq F_1^* + \Delta_1 \quad 0 \leq \Delta_1 \leq F_1^+ - F_1^* \\ & F_i(\mathbf{x}) \leq F_i^+ \quad i = 3, 4, \dots, l \\ & f_j(\mathbf{x}) \leq f_j^+ \quad j = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

$F_2^* > F_2^+$ のとき、すなわち目的関数 $F_2(\mathbf{x})$ の最小値が要求水準を満足しない場合は、
設計者が \mathbf{f}^+ の設定を緩和して再実行する。

[5] 同様に、 $3 \leq p \leq l$ に対して順に次の問題を解く。

$$\begin{aligned} \text{目的関数: } & F_p(\mathbf{x}) \rightarrow \min \\ \text{制約条件: } & F_k(\mathbf{x}) \leq F_k^* + \Delta_k \quad 0 \leq \Delta_k \leq F_k^+ - F_k^* \quad k = 1, 2, \dots, p-1 \\ & F_i(\mathbf{x}) \leq F_i^+ \quad i = p+1, p+2, \dots, l \\ & f_j(\mathbf{x}) \leq f_j^+ \quad j = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

$F_p^* > F_p^+$ のときは、 \mathbf{f}^+ の設定を緩和して再実行する。

[6] 次の問題を解き、最も優先順位の高い希求目標に対する目的関数 $f_1(\mathbf{x})$ に関して
最小値 f_1^* を得る。

$$\begin{aligned} \text{目的関数: } & f_1(\mathbf{x}) \rightarrow \min \\ \text{制約条件: } & F_i(\mathbf{x}) \leq F_i^* + \Delta_i \quad 0 \leq \Delta_i \leq F_i^+ - F_i^* \quad i = 1, 2, \dots, l \\ & f_j(\mathbf{x}) \leq f_j^+ \quad j = 2, 3, \dots, m \end{aligned}$$

[7] $f_1(\mathbf{x})$ の最小値が希求水準を満足する範囲内での改悪許容範囲として偏差 δ_1 (0
 $\leq \delta_1 \leq f_1^+ - f_1^*$) を設定して次の問題を解き、二番目に優先順位の高い希求目標に対する
目的関数 $f_2(\mathbf{x})$ に関して最小値 f_2^* を得る。

$$\begin{aligned} \text{目的関数: } & f_2(\mathbf{x}) \rightarrow \min \\ \text{制約条件: } & F_i(\mathbf{x}) \leq F_i^* + \Delta_i \quad 0 \leq \Delta_i \leq F_i^+ - F_i^* \quad i = 1, 2, \dots, l \\ & f_1(\mathbf{x}) \leq f_1^* + \delta_1 \quad 0 \leq \delta_1 \leq f_1^+ - f_1^* \\ & f_j(\mathbf{x}) \leq f_j^+ \quad j = 3, 4, \dots, m \end{aligned}$$

[8] 同様に、 $3 \leq p \leq m$ に対して順に次の問題を解く。

$$\begin{aligned} \text{目的関数: } & f_p(\mathbf{x}) \rightarrow \min \\ \text{制約条件: } & F_i(\mathbf{x}) \leq F_i^* + \Delta_i \quad 0 \leq \Delta_i \leq F_i^+ - F_i^* \quad i = 1, 2, \dots, l \\ & f_k(\mathbf{x}) \leq f_k^* + \delta_k \quad 0 \leq \delta_k \leq f_k^+ - f_k^* \quad k = 1, 2, \dots, p-1 \\ & f_j(\mathbf{x}) \leq f_j^+ \quad j = p+1, p+2, \dots, m \end{aligned}$$

[9] 各設計目標に対して得られた目的関数の最終値 F_i^* 、 f_j^* が、要求水準と希求水準
のすべてを満足し、かつ、各設計目標の達成度がそれぞれの優先性を反映していると設
計者が判断した場合は最適化は終了する。これに対し、与えられた要求水準あるいは希
求水準が満足されていない、または $F_i^* \ll F_i^+$ 、あるいは $f_j^* \ll f_j^+$ の場合のように、要求
目標あるいは希求目標のいずれかの最終値がそれぞれの水準に対して設計上不必要に小
さいと設計者によって判断された時は、希求水準 \mathbf{f}^+ をより厳しく設定しなおして[2]に
戻る。

以上に示した PRS の特質は、次のように整理される。

(1) 各設計目標の達成度が、最小化された各目的関数値からの緩和度という形で調節
できるため、重み付けの設定を要求する目標計画法などに比較して、より容易に設計者
から選好情報を引き出すことができる。

(2) それぞれの単一目的最適化ステップが、すべて ε -制約式手法の定式化である。
したがって、許容偏差のとり方には無関係にすべてのステップの解が元の多目的最適化問題のパレート解であることが保証される。このため、すべての設計目標に対する最小化を実行する以前で設計者の選好が反映されたと判断されれば、いつでもプロセスを停止できる。

6-3-3 辞書式最適化手法との関連性について

PRS は、目的関数間の定量的な比較を、重みやトレードオフ比といった陽な形では設定しない手法である。そのような多目的最適化問題の解法として、従来より辞書式最適化手法（Lexicographic optimization）⁽²⁰⁾が知られている。本項では、この辞書式最適化手法が、PRS をある特殊な条件下の設計問題へ適用したものであることを示す。すなわち、満足制約下の辞書式最適化手法の手続きは以下のように表わされる。

{1} 最小化の望まれる r 個の目標のうち、最も優先順位の高い目標に対する目的関数を $s_1(\mathbf{x})$ とし、以下 $s_2(\mathbf{x}), \dots, s_r(\mathbf{x})$ の順であるとする。これらの目的関数に対して、それぞれ最低限達成されるべきであると考えられる水準のベクトル、すなわち満足水準ベクトル $\mathbf{s}^+ = (s_1^+, s_2^+, \dots, s_r^+)$ をすべての制約条件を満足するように設定する。ここで \mathbf{x} は設計変数ベクトルである。

{2} 次の問題を解き、目的関数 s_1 の最小値 s_1^* を得る。

目的関数： $s_1(\mathbf{x}) \rightarrow \min$

制約条件： $s_i(\mathbf{x}) \leq s_i^+ \quad i = 2, 3, \dots, r$

{3} 次の問題を解き、目的関数 s_2 の最小値 s_2^* を得る。

目的関数： $s_2(\mathbf{x}) \rightarrow \min$

制約条件： $s_1(\mathbf{x}) = s_1^*$
 $s_i(\mathbf{x}) \leq s_i^+ \quad i = 3, 4, \dots, r$

{4} 同様に、 $3 \leq k \leq r$ に対して順に次の問題を解く。

目的関数： $s_k(\mathbf{x}) \rightarrow \min$

制約条件： $s_i(\mathbf{x}) = s_i^* \quad i = 1, 2, \dots, k-1$
 $s_j(\mathbf{x}) \leq s_j^+ \quad j = k+1, k+2, \dots, r$

以上に示した辞書式最適化手法の手続きは、PRS の手続きに対してさらに次に示す二つの条件を課すことにより導かれることが明らかである。

- (1) 設計目標間に優先順位は設定するものの、要求目標・希求目標の分類は考えない。
- (2) 前ステップまでに得られた目的関数値の緩和を一切許さず、等号制約条件を課すことで固定する。

辞書式最適化手法の手続きは、特に上に示した条件(2)によって大変厳しい制約を受ける。このため、設計目標間にコンフリクトが発生する場合の多い一般の機械設計問題に適用しても、ほとんどの場合最も優先順位の高い目標が達成されるだけであるという結果を招く。その意味で、PRS は辞書式最適化手法のもつこのような欠点を、各単一目的最適化段階にそれ以前の段階で達成された目標値を緩和するというプロセスを導入することで克服した方法であるといえることができる。

6-4 二輪車車体設計における三目的問題への適用

6-4-1 車体設計に対する最適化問題の設定

前節で提示した PRS を、本節では図6-2に示すような自動二輪車の車体設計へ適用する。この設計では、図中に示すように、①ねじりの静コンプライアンスの低減、②エンジンを加振源とした車体各部の振動応答レベルの低減、そして③車体質量の軽減、の三つの設計目標が存在する。これら三つの設計目標のそれぞれを独立に目的関数とした最適設計に関しては、すでに第4章および第5章で詳しく検討を行ってきた。そこでは、制約条件の上限値はあらかじめ定められたものとして取り扱ってきた。しかし、実際にはこれらの設計目標の達成度は相互の関連を把握しながら調節されるため、車体設計は本質的に多目的最適化問題として捉えられるべきものである。

この三つの設計目標のうち、ねじり静コンプライアンスは車両の進行方向に対する車体のねじれやすさを表わす量であり、高速走行時の安全性に関わる直進安定性を決定する要因である。従って、ねじり静コンプライアンスの低減は要求目標に分類され、車体がそれより低い値をもつように、明確な要求水準値が目標として与えられる。これに対

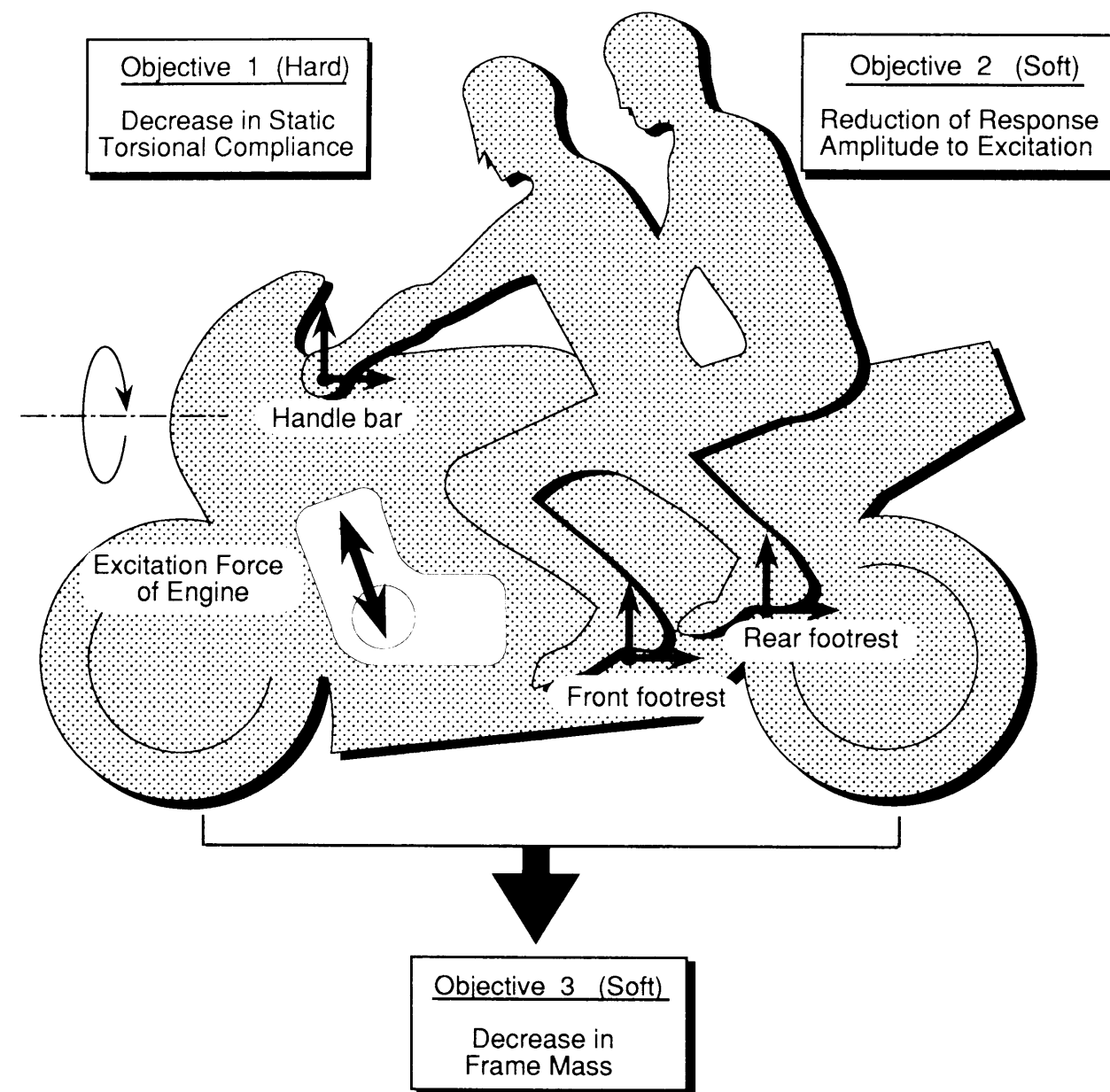


図6-2 二輪車車体設計における三つの設計目標

し、エンジン加振に対する振動応答レベルは乗員の快適性に関係する要因であり、また車体質量はその車両の運動性能に関係する要因である。乗員が感じる快適性と車両の運動性能はいずれもできる限り高められるべきであり、従って振動応答レベルと車体質量はそれぞれその値をできる限り低減することが望まれる。しかしこの二つの要因は直接的に乗員の安全を左右するものではなく、従ってそれらの要因の低減は希求目標として分類される。さらに快適性と運動性を比較した場合、特に用途が一般向けであることを考慮すると、運動性よりも快適性が重視される。

以上のことをまとめると、表6-2に示すように、この構造設計における要求目標は①ねじり静コンプライアンスの低減であり、希求目標は②振動応答レベルの低減と③車体質量の軽減であってこの順に優先順位が高い。

表6-2 二輪車の車体設計目標の分類

要 求 目 標		希 求 目 標	
目標の優先性	高い	目標の優先性	低い
目標値の設定	厳密	目標値の設定	あいまい
・ 車体のねじり 静コンプライアンスの低減		・ 車体振動の低減 ・ 車体の軽量化	

以上の設計問題を次のような三目的最適設計問題として定式化する。

$$\left. \begin{array}{l} \text{目的関数: } s(\mathbf{x}) = \{F_1(\mathbf{x}), f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x})\} \rightarrow \min \\ \text{制約条件: } x_i^L \leq x_i \leq x_i^U \quad (i=1,2,\dots,n) \end{array} \right\} \quad (6-4)$$

ここで、ベクトル目的関数 $s(\mathbf{x})$ は要求目標の目的関数 $F_1(\mathbf{x}) = S_f$ および希求目標の目的関数 $f_1(\mathbf{x}) = A$ 、 $f_2(\mathbf{x}) = M_f$ からなる。記号 S_f 、 A 、 M_f は、それぞれ静ねじり剛性の逆数であるねじりの静コンプライアンス、最大振動応答レベル、車体質量を表わす。

上記の問題は、前節で提示した PRS を用いて、以下の手順で解かれる。

- [I] 要求目標におけるねじりの静コンプライアンスに要求水準 $F_1^+ = S_1^+$ 、希求目標における振動応答レベルと車体質量にそれぞれ希求水準 $f_1^+ = A^+$ と $f_2^+ = M_f^+$ を設定する。
- [II] 振動応答レベルが希求水準 f_1^+ 以下、および車体質量が希求水準 f_2^+ 以下という制約の下で、ねじりの静コンプライアンスを最小化する。
- [III] 許容偏差 Δ_1 を設定して、ねじりの静コンプライアンスが $F_1^+ + \Delta_1$ 以下、および車体質量が希求水準 f_2^+ 以下という制約の下で振動応答レベルを最小化する。
- [IV] 許容偏差 Δ_1' および δ_1 を新たに設定して、ねじりの静コンプライアンスが $F_1^+ + \Delta_1'$ 以下、および振動応答レベルが $f_1^+ + \delta_1$ 以下という制約の下で車体質量を最小化する

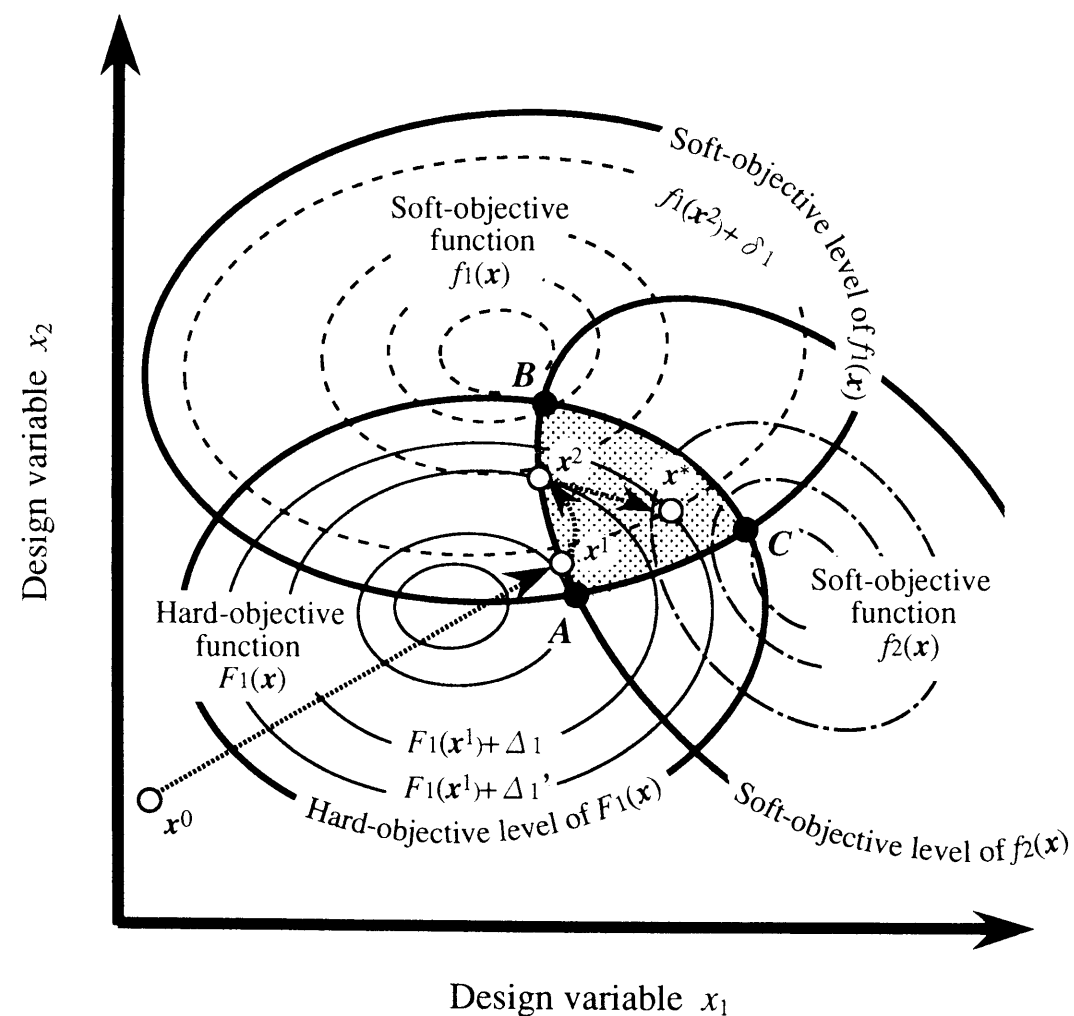


図6-3 プライオリティランキング政策の概念

図6-3には、以上の手順 [I] ~ [IV] を概念的に示す。この図は、二つの設計変数 x_1 、 x_2 に関して、ねじりの静コンプライアンス $F_1(x)$ 、振動応答レベル $f_1(x)$ 、および車体質量 $f_2(x)$ の各目的関数値の等高線を示している。

手順 [I] で各目標に対して要求水準もしくは希求水準を設定すると、設計可能領域は図6-3の曲線 AB、BC、CA で囲まれた内側の空間となる。手順 [II] では、初期値 x^0 より出発して、 x^1 において設計可能領域 ABC 内でのねじりの静コンプライアンスの最小値 $F_1(x^1)$ を得る。続いて、手順 [III] では振動応答レベル f_1 の最小化を行なう。このとき、許容偏差 Δ_1 を導入して、ねじりの静コンプライアンス F_1 の改悪限度を設定するため、その限度内での振動応答レベルの最小値 $f_1(x^2)$ が得られる。最後に、手順 [IV] で車体質量 f_2 の最小化を実行し、最適解 x^* を得る。このとき、許容偏差 Δ_1' および δ_1 を新たに導入することにより、ねじりの静コンプライアンスと振動応答レベルの改悪限度を設定する。

6-4-2 設計に用いる構造モデル

最適設計の対象とする二輪車のフレームは、第5章の図5-4に示したのと全く同じものとする。ただし、設計変更を行なう部材は計算時間の制約で図6-4に示すように7部材とした。それぞれの部材は円管であり、一部材につき直径 ϕ と肉厚 t が設計変数となるため、その総数は14となった。また、振動応答レベルの計算に必要な、エンジン加振条件、応答評価点などもすべて前章で行なった最適化と同じである。さらに、応答評価点の重み付けは、ハンドル・フロントフットレスト・リアフットレストの三点とも 1.0 とした。

設計変数の初期値を図6-5に示す。この初期設計でのねじりの静コンプライアンス、最大振動応答レベル、質量の値は表6-3に示すとおりである。また、ハンドル、フロントフットレスト、およびリアフットレストにおける振動応答レベルは、第5章の図5-8から図5-10に示したが、ここで便宜上もう一度図6-6から図6-8に示す。

表6-3 初期設計における各構造特性値

静コンプライアンス [rad/Nm ²]	最大振動応答レベル [G]	車体質量 [kg]
9.09×10^6	36.9	17.8

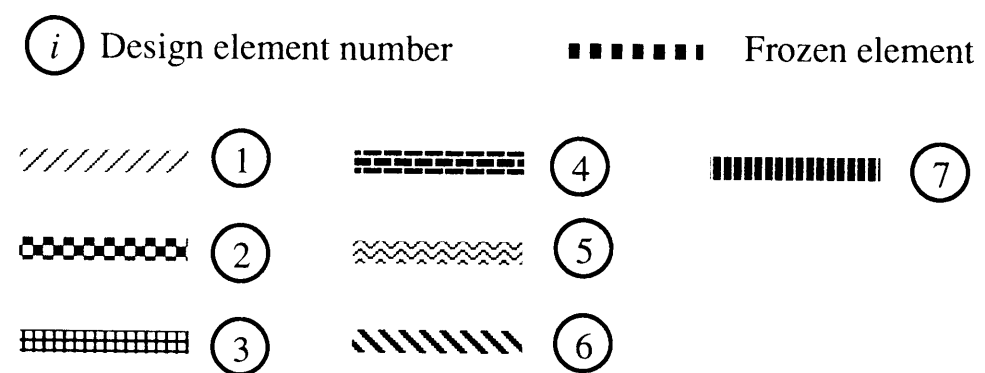
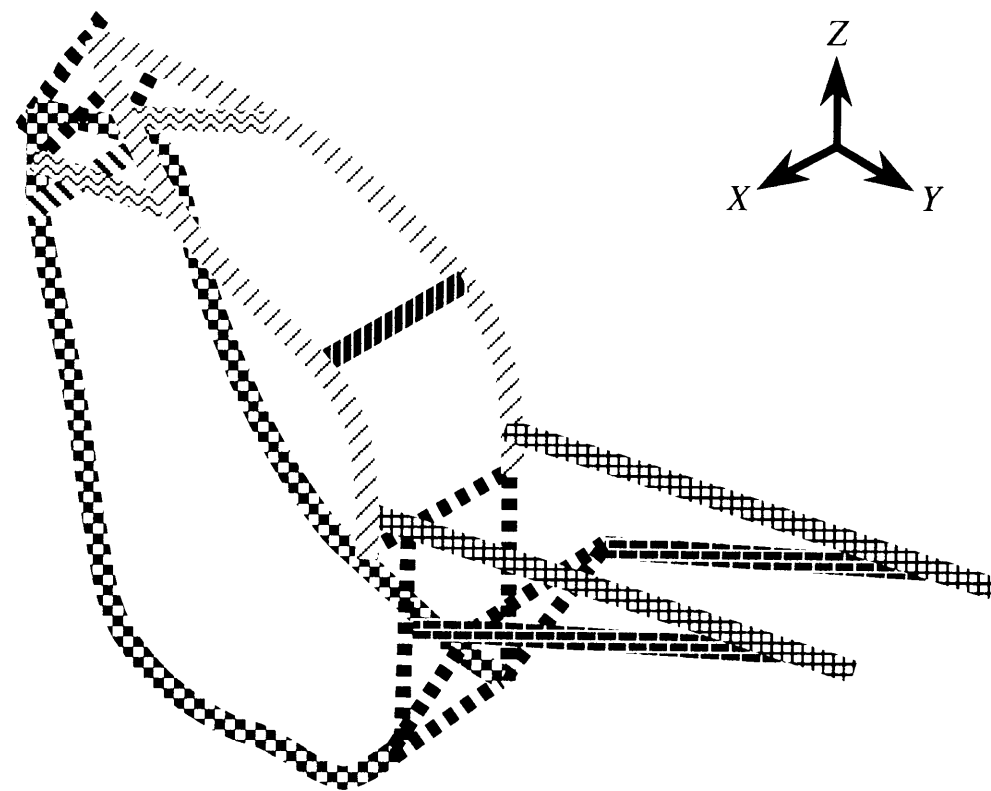


図6-4 二輪車フレーム多目的最適設計の設計変数グループ

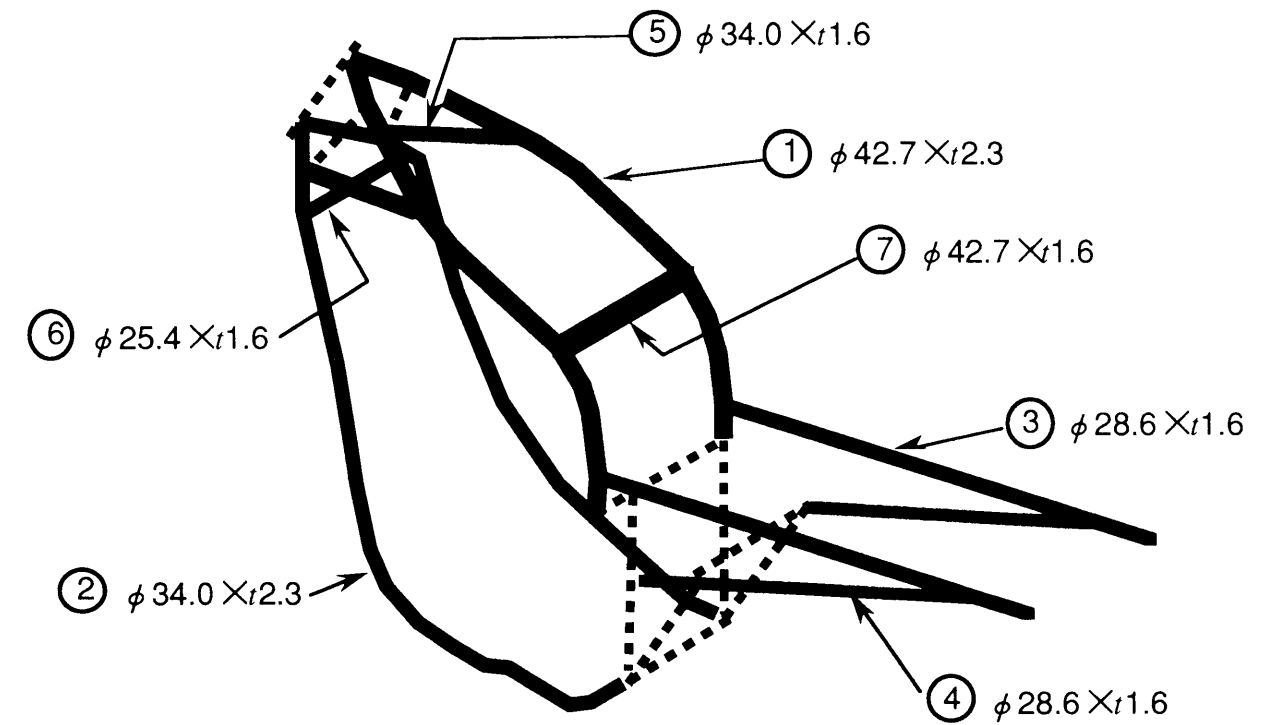


図6-5 初期設計の部材寸法

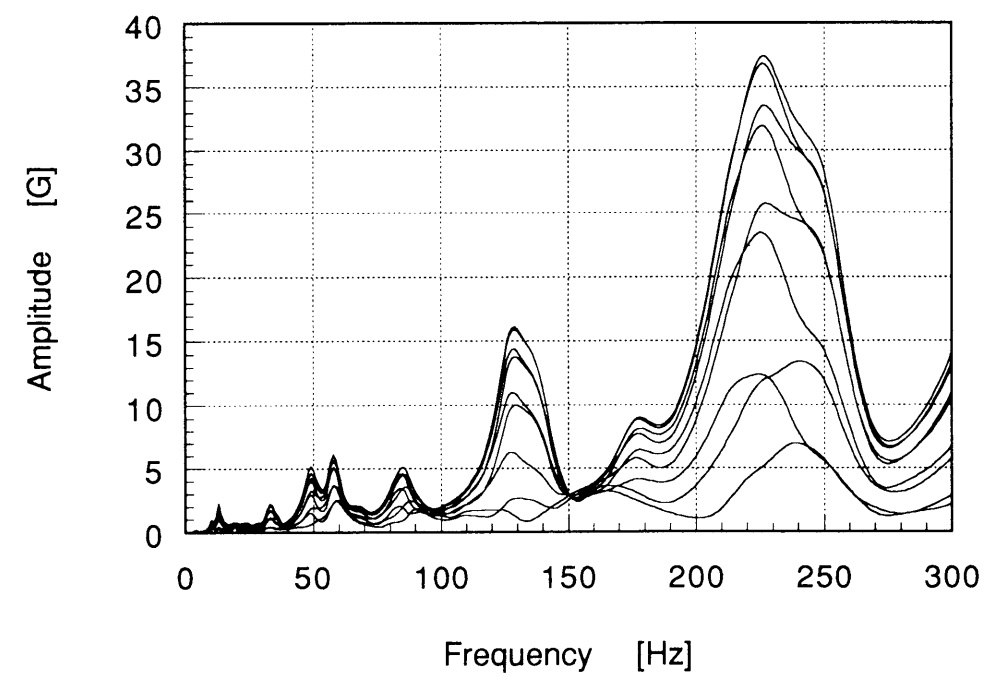


図6-6 初期設計のハンドルにおける重み付き振動応答レベル

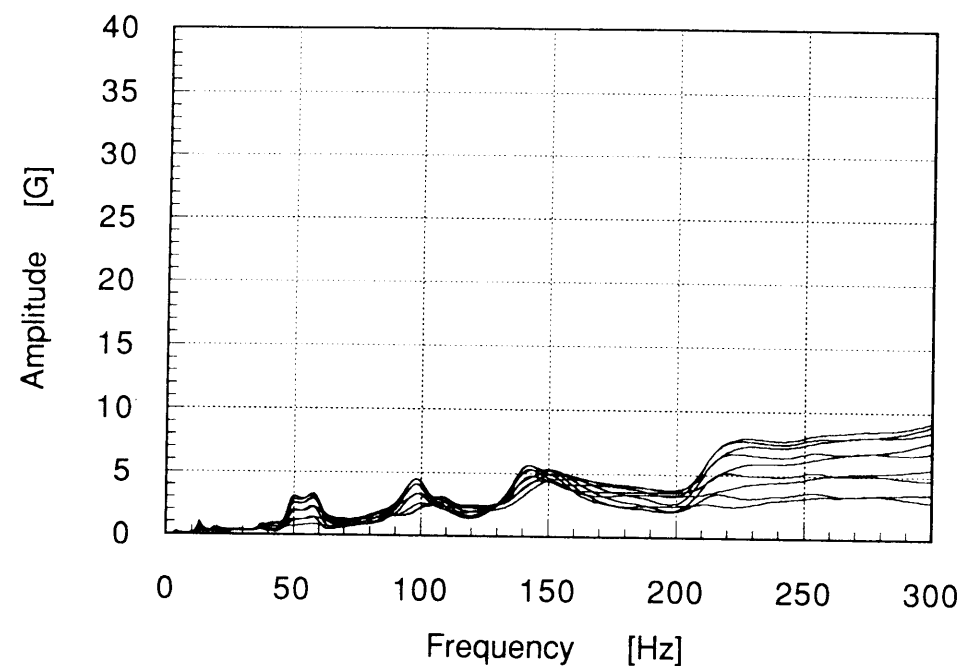


図6-7 初期設計のフロントフットレストにおける重み付き振動応答レベル

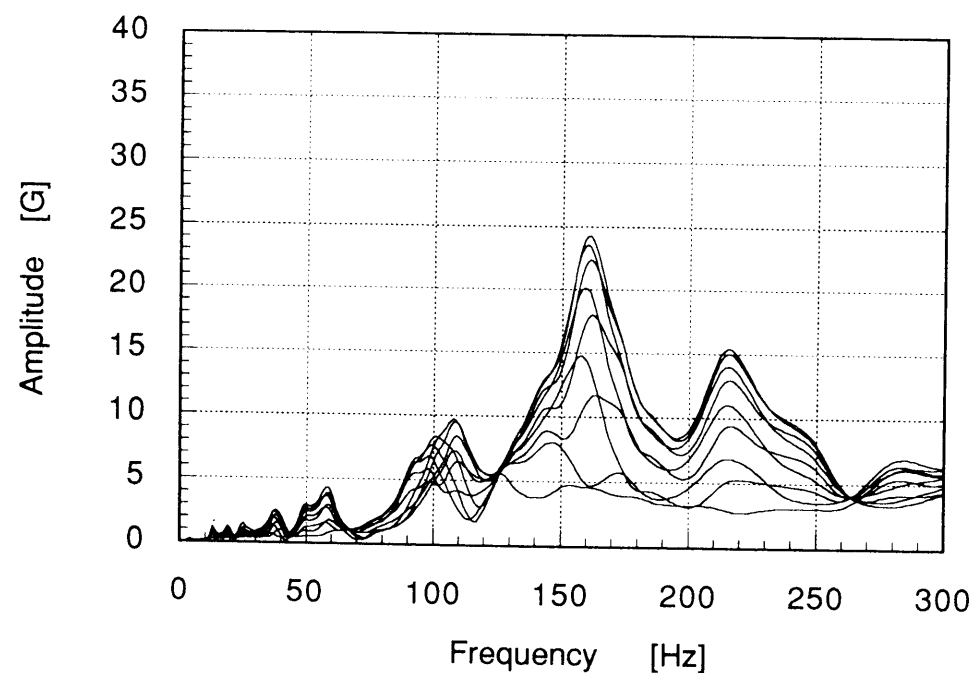


図6-8 初期設計のリアフットレストにおける重み付き振動応答レベル

6-4-3 ねじり静コンプライアンス最小化設計

第一段階の単一目的最適化問題はねじり静コンプライアンスの最小化であり、以下のよう定式化される。

$$\left. \begin{array}{l} \text{目的関数: } S_i \rightarrow \min \\ \text{制約条件: } A - A^+ \leq 0 \\ \quad \quad \quad M_f - M_f^+ \leq 0 \end{array} \right\} \quad (6-5)$$

式(6-5)では、簡単のため振動応答レベルに関する制約条件を一本の制約式で表わしている。しかし実際には振動応答レベルに関しては、第5章で振動応答レベルの目的関数を構成した時と同様、離散化した加振力のそれぞれに対して発生する振動応答のすべてのピーク値のうちの最大値が A_{\max} であるとき、 $A > 0.7A_{\max}$ であるような p 個のピーク値を選んで、以下のような一群の制約条件式として取り扱った。

$$A_i - A^+ \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (6-6)$$

また、各設計目標に対する水準は次のように設定した。

$$\begin{array}{ll} \text{ねじり静コンプライアンスの要求水準:} & S_i^+ = 1.06 \times 10^{-5} \text{ [rad/Nm}^2\text{]} \\ \text{振動応答レベルの希求水準} & : A^+ = 40.0 \text{ [G]} \\ \text{質量の希求水準} & : M_f^+ = 19.6 \text{ [kg]} \end{array}$$

また、各部材の直径と肉厚に関する側面制約は以下のように設定した。

$$10.0 \leq \phi_i \leq 48.6 \quad (i = 1, 2, \dots, 7) \quad (6-7)$$

$$1.4 \leq t_i \leq 2.8 \quad (i = 1, 2, \dots, 7) \quad (6-8)$$

以上のような条件のもとで実行したねじり静コンプライアンス最小化設計の結果を表6-4に示す。この時の各設計部材の断面寸法を図6-9に示す。また、振動レベルに関しては、ハンドル、フロントフットレスト、およびリアフットレストにおける応答を図6-10から図6-12に示す。

表6-4 PRS第一ステップ（静コンプライアンス最小化）終了後の各構造特性値

静コンプライアンス [rad/Nm ²]	最大振動応答レベル [G]	車体質量 [kg]
5.31×10^{-6}	39.5	19.1

PRS 第一ステップの結果、目的関数であるねじりの静コンプライアンスの値は初期設計から 42% 減少した。制約に関しては、振動応答レベルと質量に関する条件がいずれもアクティブとなった。図6-10から、最適化後の最大応答レベルはハンドルにおいて 230Hz 付近で発生しており、その値は初期設計から約 7% 悪化して希求水準に対してアクティブな 39.5G となったことがわかる。また質量についても同じく約 7% 増加している。このことから、初期設計におけるねじりの静コンプライアンスに関する設計改善という目標は、振動応答レベルおよび質量に関する設計改善という目標とコンフリクトしたことがわかる。

次に、最適化後の部材寸法について考察する。初期設計に較べて部材①、②、⑦などエンジンを取り囲む部分とそれらを連結するブリッジ部材はいずれも直径、肉厚ともほぼ側面制約の上限まで増加した。これらの部材は、第 4 章で詳細に検討したように、ねじり荷重の付加されるヘッドパイプと拘束点であるスイングアームピボットとを結んでおり、ねじり静コンプライアンスの低減に対して大きな寄与度を持つ。ただし、第 4 章ではエンジン下部の部材の一部が消滅するという変化が見られたのに対し、ここではその結果は得られていない。これは、第 4 章ではいくつかのセグメントに分割して設計変更していたエンジン下部部材に相当する部分を本章のフレームモデルでは部材②として一括していることで、第 4 章での例のように局所的なセグメントごとの寄与度の相違が現われなかったためである。

これとは逆に、部材③、④のシートレールは直径は細く肉厚は薄くなった。このことから、これらの部材はヘッドパイプとスイングアームピボットを結ぶ部材を多少補強する程度の効果は認められるものの、ねじりの静コンプライアンスに対してはあまり大きな寄与をしていないことが示された。

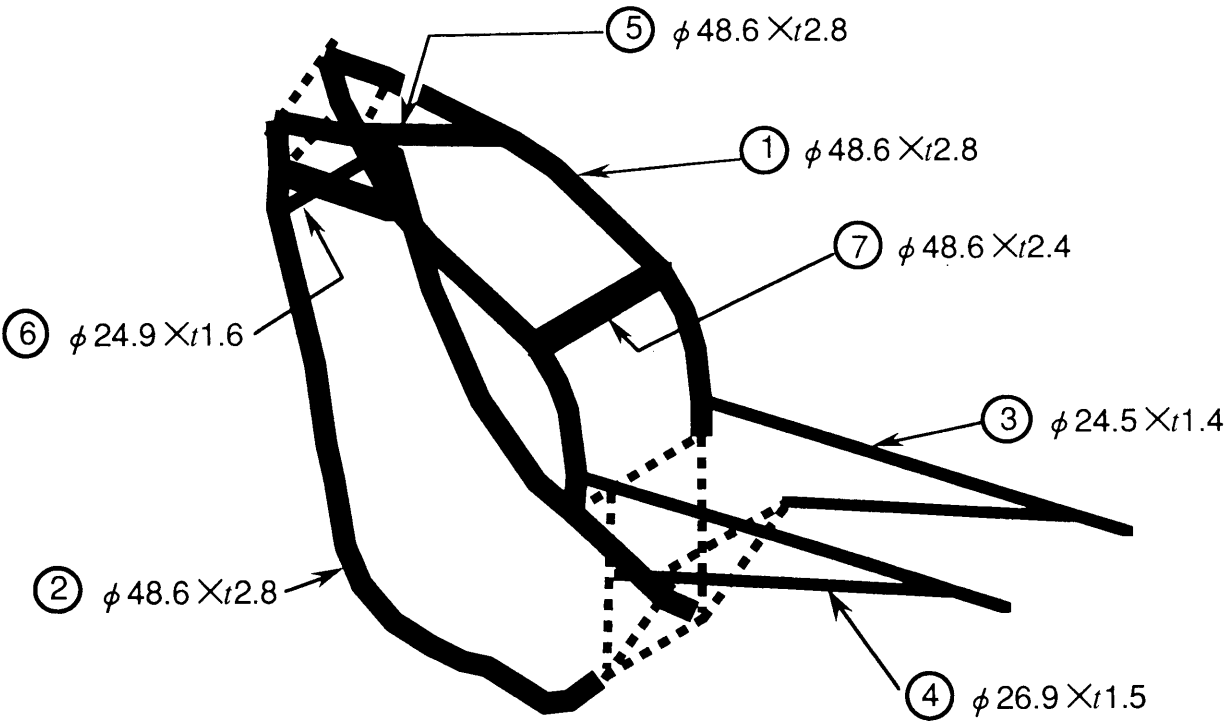


図6-9 PRS第一ステップ（ねじり静コンプライアンス最小化）終了後の部材寸法

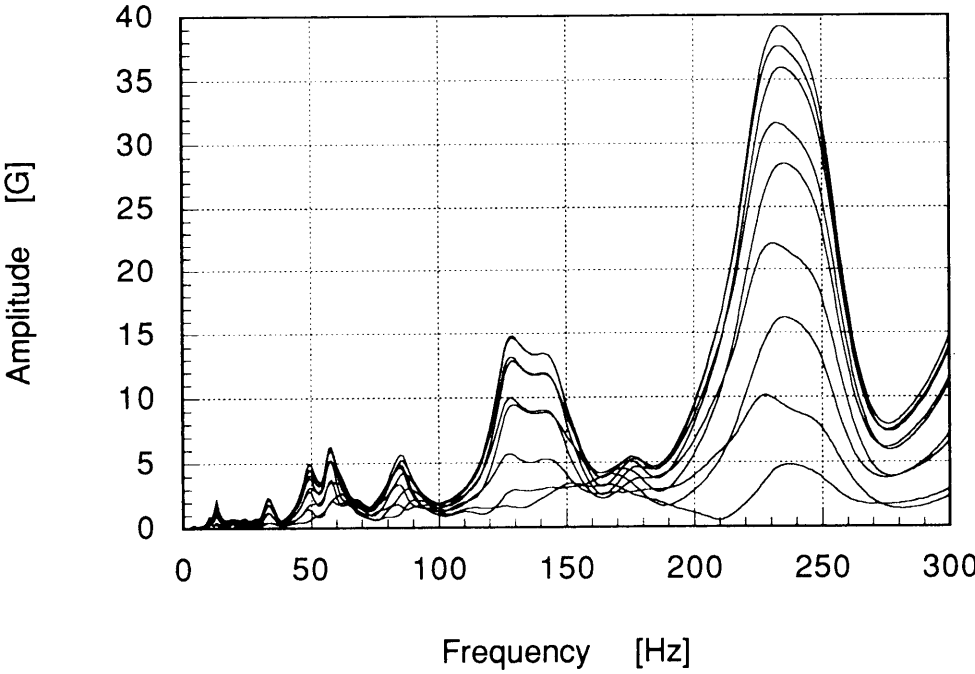


図6-10 PRS第一ステップ（ねじり静コンプライアンス最小化）終了後のハンドルでの重み付き応答

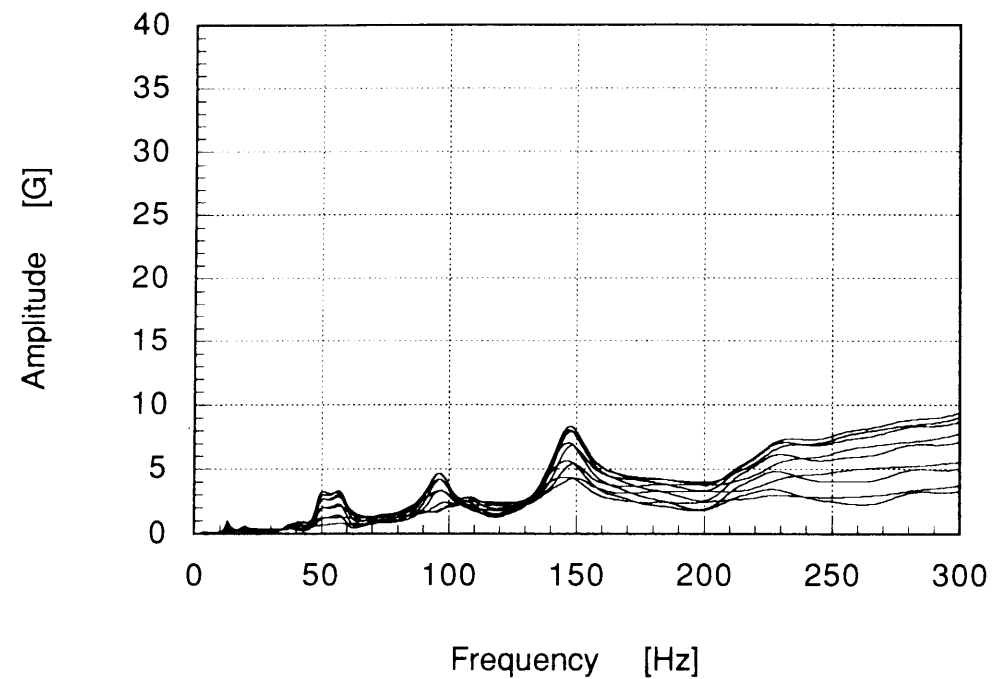


図6-11 PRS第一ステップ（ねじり静コンプライアンス最小化）終了後の
フロントフットレストでの重み付き応答

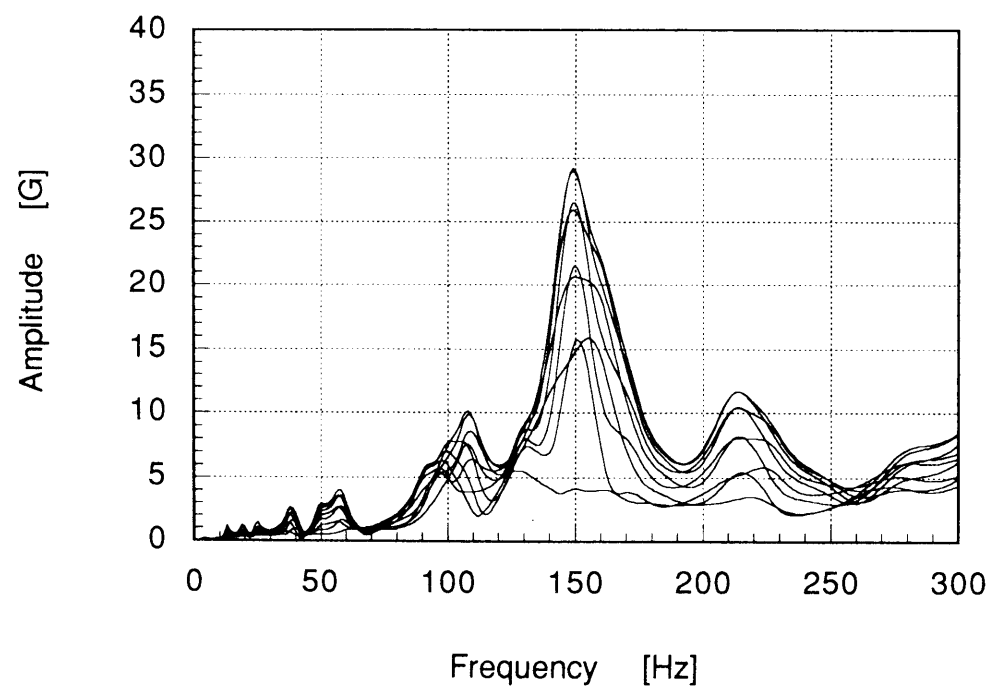


図6-12 PRS第一ステップ（ねじり静コンプライアンス）終了後の
リアフットレストでの重み付き応答

6-4-4 振動応答レベル最小化設計

PRS 第一ステップを実行した結果、振動応答レベルの最大値が希求水準に対してアクティブとなったが、その他の設計目標はいずれも与えられた水準を満足している。したがって、次に6-4-1項に示した手順[Ⅲ]に基づき、PRS の第二ステップとしてエンジンの加振力によって生じる車体各部の振動応答レベルを最小化する。この問題に関しては、第5章で詳細に述べたミニマックス法による定式化をそのまま適用する。式(5-17)から式(5-18)に示した定式化に対応して、PRS の第二段階は次のように定式化される。

$$\text{目的関数： } y \rightarrow \min \quad (6-9)$$

$$\text{制約条件： } S_i - S_i^* - \Delta \leq 0 \quad (6-10)$$

$$M_f - M_f^+ \leq 0 \quad (6-11)$$

$$\left. \begin{array}{l} w_{a1}^1 A_{a1}^1 - y \leq 0 \\ \vdots \\ w_{aq}^{n_{aq}} A_{aq}^{n_{aq}} - y \leq 0 \end{array} \right\} \quad (6-12)$$

$$\left. \begin{array}{l} w_{b1}^1 A_{b1}^1 - y \leq 0 \\ \vdots \\ w_{bq}^{n_{bq}} A_{bq}^{n_{bq}} - y \leq 0 \end{array} \right\} \quad (6-13)$$

$$\left. \begin{array}{l} w_{c1}^1 A_{c1}^1 - y \leq 0 \\ \vdots \\ w_{cq}^{n_{cq}} A_{cq}^{n_{cq}} - y \leq 0 \end{array} \right\} \quad (6-14)$$

ここで、 S_i^* は PRS の第一ステップで得られたねじり静コンプライアンスの最小値であり、 Δ はその緩和許容偏差である。ここでは、緩和はねじり静コンプライアンスの要求水準一杯まで許容することとした。したがって、許容偏差 Δ の値は次のようになる。

$$\begin{aligned} \Delta &= S_i^+ - S_i^* \\ &= 1.06 \times 10^{-5} - 5.31 \times 10^{-6} \\ &= 5.29 \times 10^{-6} \text{ [rad/Nm}^2\text{]} \end{aligned}$$

車体質量と振動応答レベルに対する希求水準は、PRS 第一ステップのねじり静コンプライアンス最小化設計と同じく次のように設定した。

振動応答レベルの希求水準： $A^+ = 40.0$ [G]
 質量の希求水準： $M_f^+ = 19.6$ [kg]

また、各部材の直径と肉厚に関する側面制約も変更せず以下のように設定した。

$$10.0 \leq \phi_i \leq 48.6 \quad (i = 1, 2, \dots, 7)$$

$$1.4 \leq t_i \leq 2.8 \quad (i = 1, 2, \dots, 7)$$

以上のような条件のもとで実行した振動応答レベル最小化設計の結果を表6-5に示す。
 この時の各設計部材の断面寸法を図6-13に示す。また、振動レベルに関しては、ハンドル、フロントフットレスト、およびリアフットレストにおける応答を図6-14から図6-16に示す。

表6-5 PRS第二ステップ（振動応答レベル最小化）終了後の各構造特性値

静コンプライアンス [rad/Nm ²]	最大振動応答レベル [G]	車体質量 [kg]
7.77×10^{-6}	24.4	18.1

PRS 第二ステップの結果、目的関数である最大振動応答レベルの値は第一ステップの結果から約38%減少した。図6-14および図6-16から、最適化後の最大応答レベルはハンドルにおいて130Hz 付近および220Hz 付近で、さらにはリアフットレストにおいて140Hz 付近で同時に発生していることがわかる。制約条件については、ねじり静コンプライアンスは緩和限界の範囲内で PRS 第一ステップの結果から約46%改悪されたが、質量は逆にわずかながら軽減され、結果的にいずれもアクティブとはなっていない。このことから、上述のように車体各部で発生する振動応答どうしが相互にコンフリクトして最適化が終了したことがわかる。

また、最適化後の部材寸法は、PRS 第一ステップのねじり静コンプライアンス最小化設計で部材①、②、⑦などエンジンを取り囲む部分とそれらを連結するブリッジ部材が

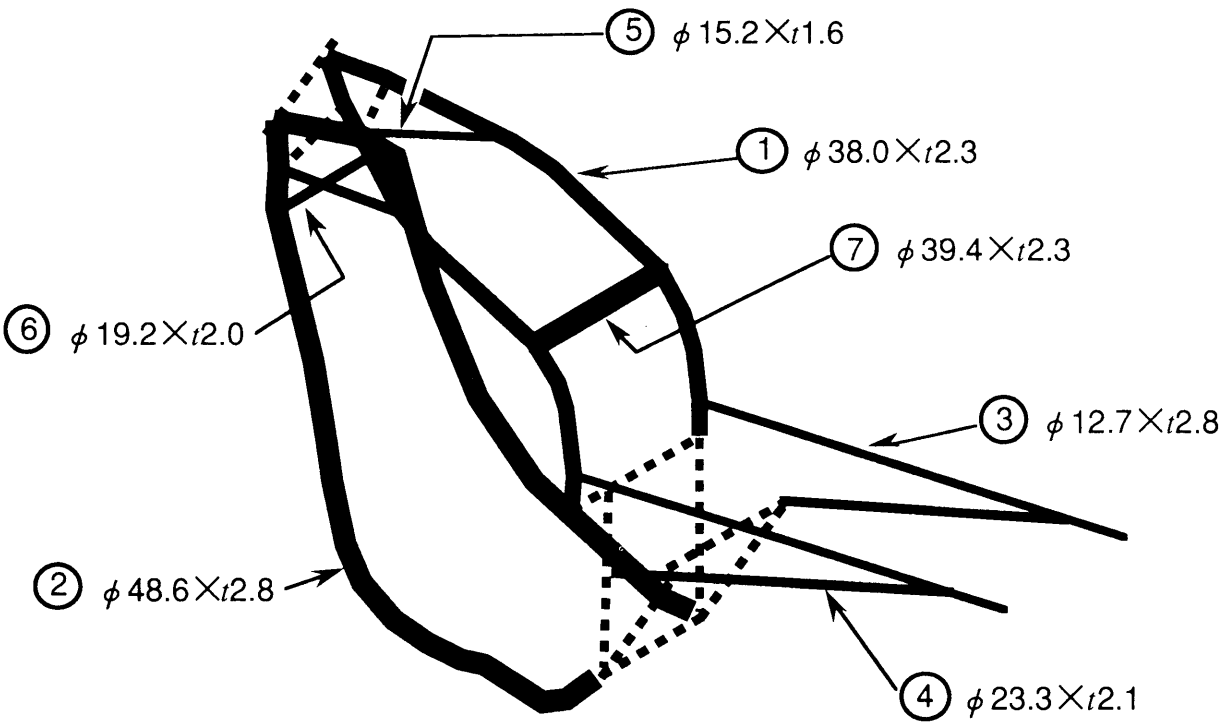


図6-13 PRS第二ステップ（振動応答レベル最小化）終了後の部材寸法

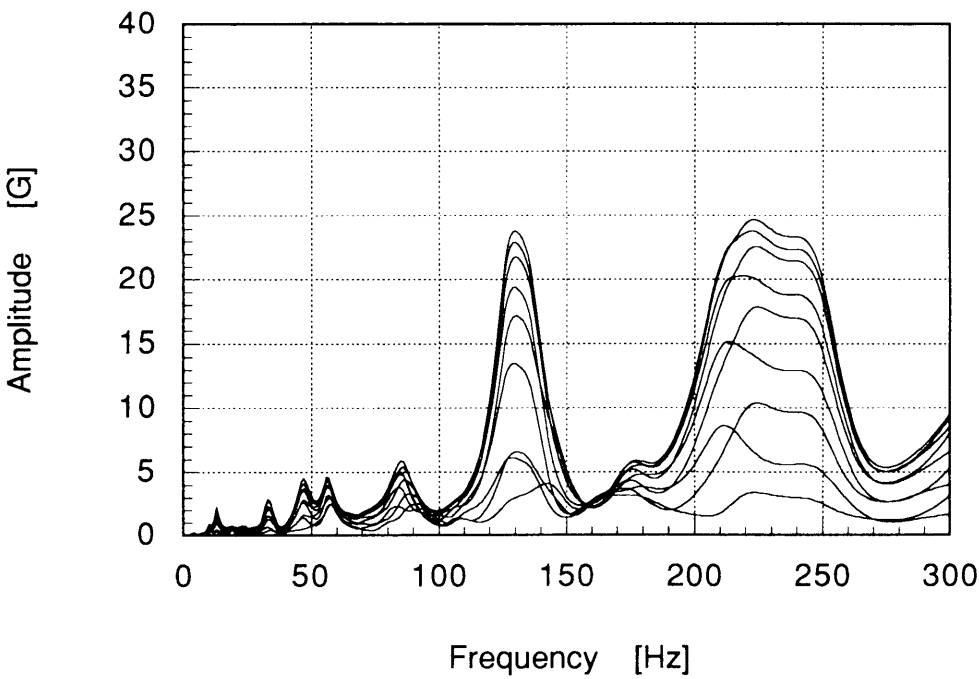


図6-14 PRS第 二 ステップ（振動応答レベル最小化）終了後の
 ハンドルでの重み付き応答

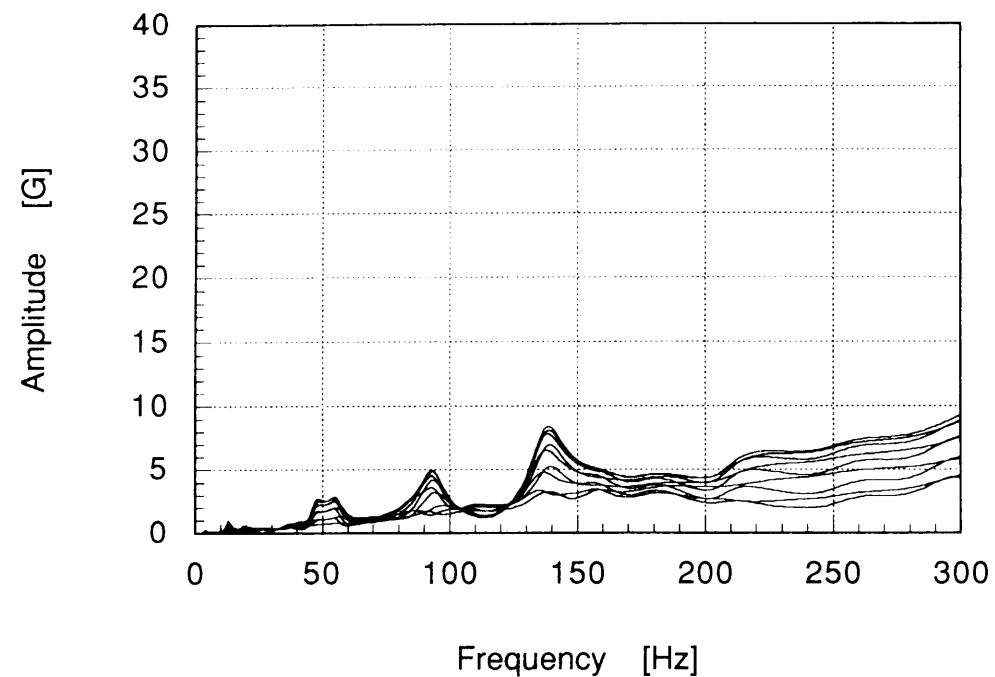


図6-15 PRS第ニステップ（振動応答レベル最小化）終了後の
フロントフットレストでの重み付き応答

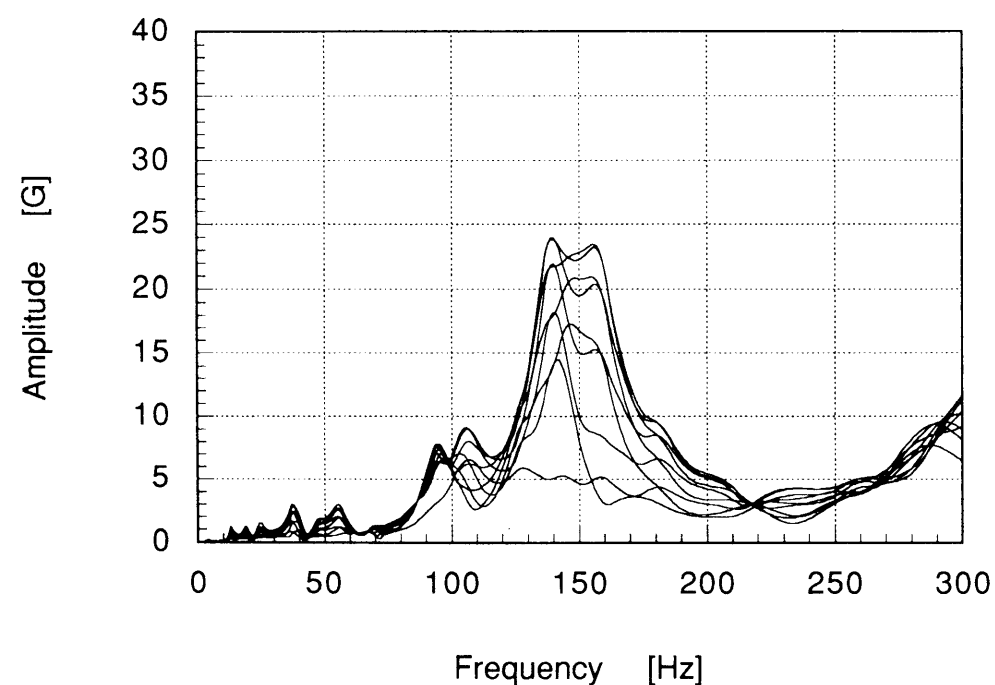


図6-16 PRS第ニステップ（振動応答レベル最小化）終了後の
リアフットレストでの重み付き応答

いずれも直径、肉厚ともほぼ側面制約の上限まで増加したのに対し、部材①の直径、肉厚が減少した点が注目される。この結果は、異なる初期寸法から出発したにもかかわらず、第5章で検討した振動応答レベル最小化設計の結果とほぼ同じ傾向を示している。

6-4-5 車体質量最小化設計

PRSの最終ステップとして、6-4-1項で示した手順[IV]に従って車体質量 M_f の最小化を行なう。この最適化問題は以下のように定式化される。

$$\text{目的関数： } M_f \rightarrow \min \quad (6-15)$$

$$\text{制約条件： } S_i - S_i^* - \Delta' \leq 0 \quad (6-16)$$

$$A_i - A^* - \delta \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (6-17)$$

式(6-16)の Δ' は式(6-10)の Δ と同様、PRS第一ステップで得られたねじり静コンプライアンスの最小値からの緩和許容偏差である。ここでは、緩和はねじり静コンプライアンスの要求水準から10%内側までとした。これは、ねじり静コンプライアンスの値がPRS第一ステップで要求水準の約50%である $5.31 \times 10^{-6} \text{ rad/Nm}^2$ まで改善されたにもかかわらず、第二ステップでは逆に $7.77 \times 10^{-6} \text{ rad/Nm}^2$ まで改悪されており、さらに第三ステップの質量最小化設計で初期設定した要求水準一杯まで改悪されてしまうことを防ぐためである。したがって、 Δ' の値は次のようになる。

$$\begin{aligned} \Delta' &= 0.9 \times S_i^+ - S_i^* \\ &= 9.54 \times 10^{-6} - 5.31 \times 10^{-6} \\ &= 4.23 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

また、式(6-17)は、6-4-3項の定式化で行なったと同様、振動応答のすべてのピーク値のうちの最大値が A_{\max} であるとき、 $A > 0.7A_{\max}$ であるような p 個のピーク値を選び、それらに対してPRS第二ステップで得られた最小値 A^* からの許容限界範囲内で改悪を許すことを表わす。このとき、緩和限界 δ の値は、最小値 A^* から10%だけ改悪を許すとし、次のように設定した。

$$\begin{aligned}\delta &= 0.1 \times A^* \\ &= 0.1 \times 24.4 \\ &= 2.4 \text{ [G]}\end{aligned}$$

したがって、振動応答レベルに対する制約条件の上限値は 26.8G となる。また、各部材の直径と肉厚に関する側面制約は、ここまでの二ステップと変更せず以下のように設定した。

$$\begin{aligned}10.0 \leq \phi_i \leq 48.6 \quad (i=1,2,\dots,7) \\ 1.4 \leq t_i \leq 2.8 \quad (i=1,2,\dots,7)\end{aligned}$$

以上のような条件のもとで実行した質量最小化設計の結果を表6-6に示す。この時の各設計部材の断面寸法を図6-17に示す。また、振動レベルに関しては、ハンドル、フロントフットレスト、およびリアフットレストにおける応答を図6-18から図6-20に示す。

表6-6 PRS第三ステップ（質量最小化）終了後の各構造特性値

静コンプライアンス [rad/Nm ²]	最大振動応答レベル [G]	車体質量 [kg]
9.68×10^{-6}	25.6	17.0

PRS 第三ステップの結果、目的関数であるフレーム質量の値は第二ステップの結果から 1.1kg、約 6 % 減少した。ねじり静コンプライアンスの値は PRS 第二ステップの結果からさらに 25% 改悪され、緩和を考慮した制約の上限値 $9.54 \times 10^{-6} \text{ rad/Nm}^2$ に対してアクティブとなった。また、最大振動応答レベルの値も同時に制約の上限値 26.8G に対しほぼアクティブとなっている。図6-18と図6-20から、振動応答レベルの最大値がハンドルにおいて 220Hz で発生すること、その他ハンドルにおいて 130Hz、リアフットレストにおいて 160Hz でそれぞれ最大値に近いレベルとなっていることがわかる。図6-19からは、フロントフットレストでの応答レベルは着目している周波数帯の全域にわたって低いことがわかる。

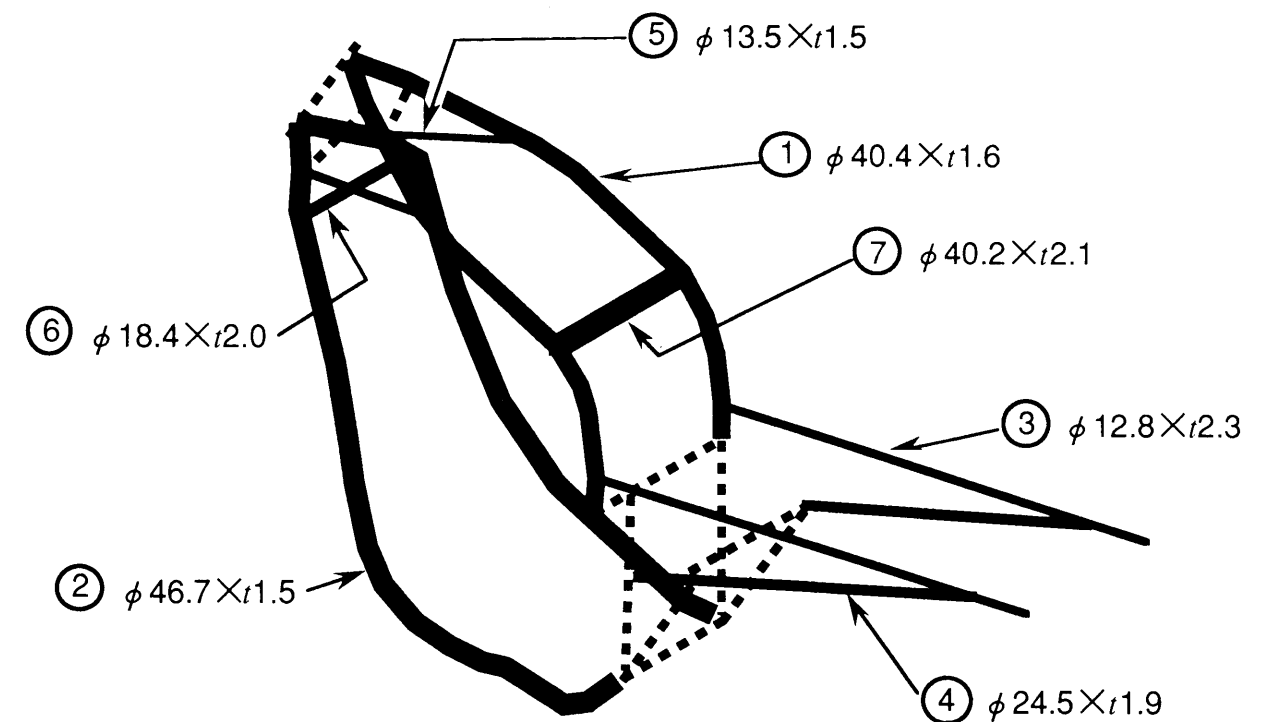


図6-17 PRS第三ステップ（質量最小化）終了後の部材寸法

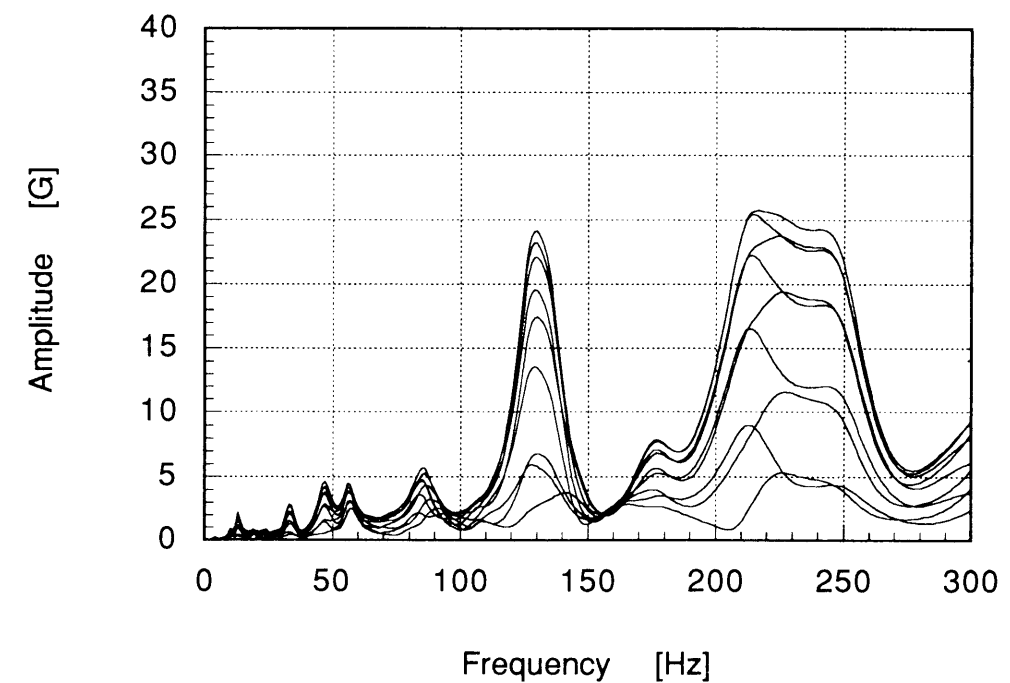


図6-18 PRS第三ステップ（質量最小化）終了後のハンドルでの重み付き応答

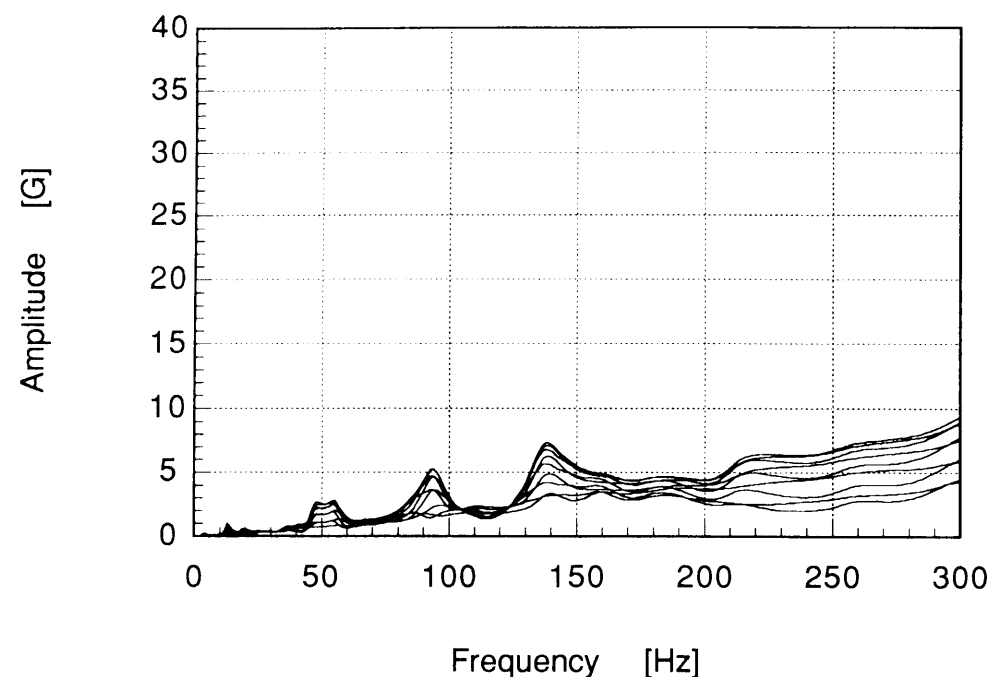


図6-19 PRS第三ステップ（質量最小化）終了後の
フロントフットレストでの重み付き応答

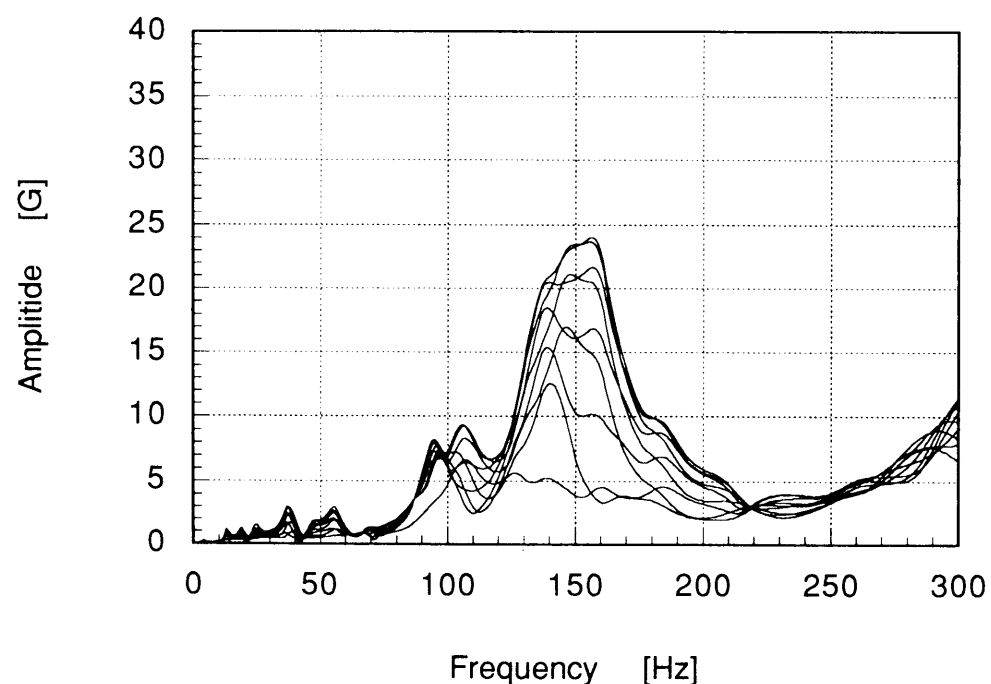


図6-20 PRS第三ステップ（質量最小化）終了後の
リアフットレストでの重み付き応答

また、図6-17より、最適化後の部材寸法は、管直径に関してはPRS 第二ステップの結果と大きな変化はないが、管肉厚はほぼ一様に減少して薄くなっていることがわかる。これは、PRS の前二ステップよりも比較的厳しい制約条件の下で質量を軽減することに対しては、管直径よりも剛性に対して寄与度の低い管肉厚を減少させることだけが可能であったためとみられる。

6-4-6 車体設計に適用したプライオリティランキング政策に関する総括

以上に示した PRS の各段階におけるねじりの静コンプライアンス・最大振動応答レベル・フレーム質量それぞれの値、および対応する制約条件の上限値（制約値）の履歴を表6-7および図6-21から図6-23に示す。これらの図を参照しつつ、前三項で述べた一連のPRS の手続きの実行によって生じた三つの構造特性値の変化を、もう一度以下にまとめて述べる。

図6-21に示した要求目標であるねじりの静コンプライアンスは、初期設計で要求水準を満足しており、PRS の第一ステップでさらに大きく低減された後、第二ステップで振動応答レベル最小化と引き換えに改悪されている。そこで、第三ステップでは初期設計からあまり改悪されすぎないように制約条件の上限値をやや厳しいほうに設定し直した結果、ねじりの静コンプライアンスの値はその制約値に対してアクティブとなるまで改悪されて最適化が終了した。

図6-22に示した第一希求目標の最大振動応答レベルは、初期設計から PRS の第一ステップで希求水準に対してアクティブとなるまで改悪された。その後、第二ステップではそれ自身が最小化されたため、その値は大きく低減された。第二ステップで得られた最大振動応答レベルの最小値はあまり改悪したくないとの設計者の意向を反映するために、第三ステップでは最大振動応答レベルの改悪は最小値の10%のみとして制約条件の上限値を設定し直した。このため、第三ステップでは最大振動応答レベルの値がその許容限度一杯改悪され、制約条件に対してアクティブとなった。

最後に、図6-23に示した第二希求目標の質量は、最大振動応答レベルと同様初期設計から PRS の第一ステップで希求水準に対してアクティブとなるまで改悪された。第二ステップでは最大振動応答レベルの最小化に伴って質量も低下しており、低振動化と軽量化が同時に達成されたことがわかる。さらに第三ステップでは、質量自身の最小化で第二ステップに続いて低減されている。

表6-7 PRSの各段階における車体特性値と制約の上限値

	初期設計	PRS第一ステップ 終了後	PRS第二ステップ 終了後	PRS第三ステップ 終了後
ねじりの 静コンプライアンス [rad/Nm ²]	9.09×10^{-6}	5.31×10^{-6}	7.77×10^{-6}	9.68×10^{-6}
制約の上限値	1.06×10^{-5}	1.06×10^{-5}	1.06×10^{-5}	9.54×10^{-6}
最大振動応答 レベル [G]	36.9	39.5	24.4	25.6
制約の上限値	40.0	40.0	40.0	40.0
車体質量 [kg]	17.8	19.1	18.1	17.0
制約の上限値	19.6	19.6	19.6	19.6

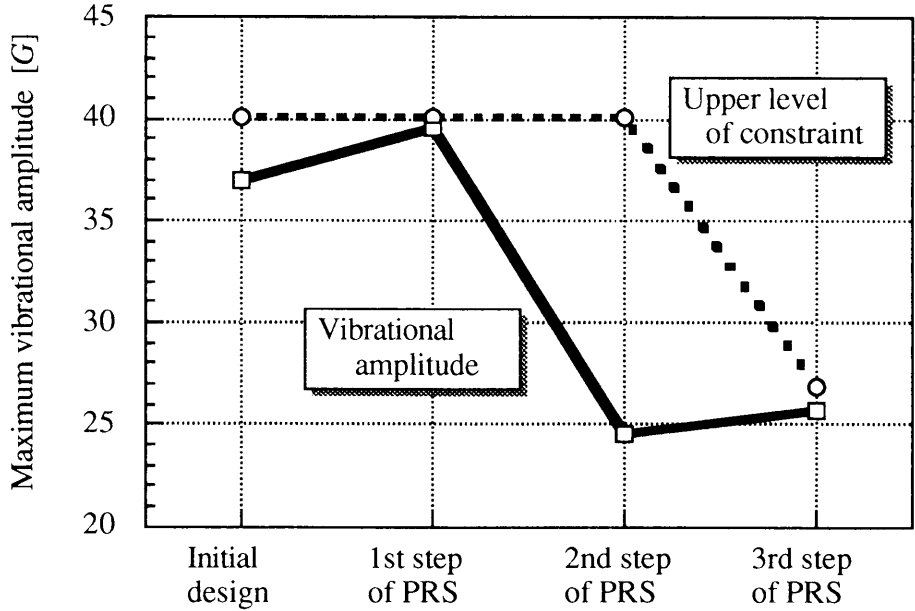


図6-22 PRS 各段階での最大振動応答レベルの履歴と制約の上限値

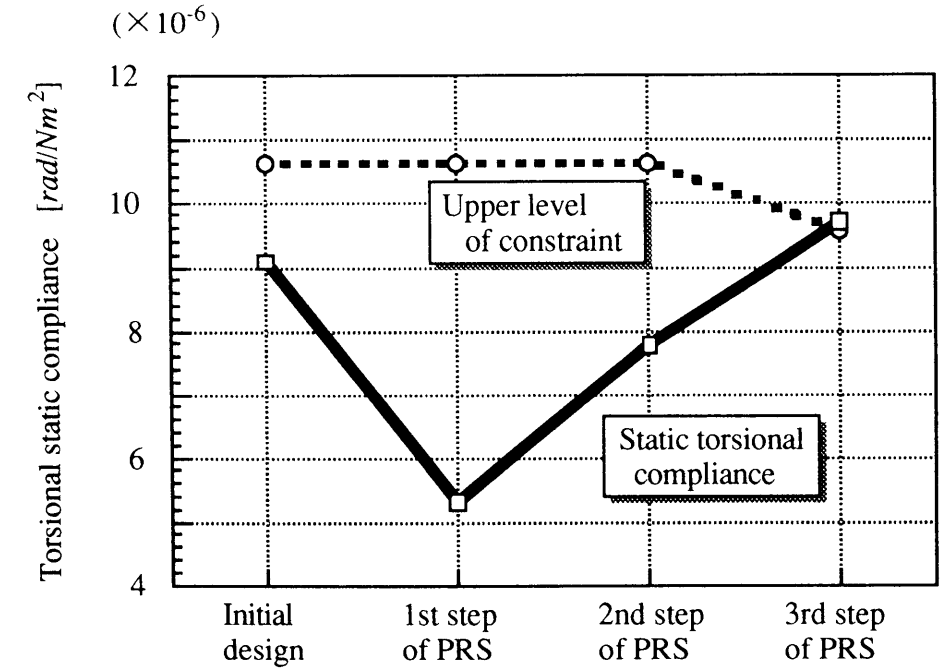


図6-21 PRS 各段階でのねじり静コンプライアンスの履歴と制約の上限

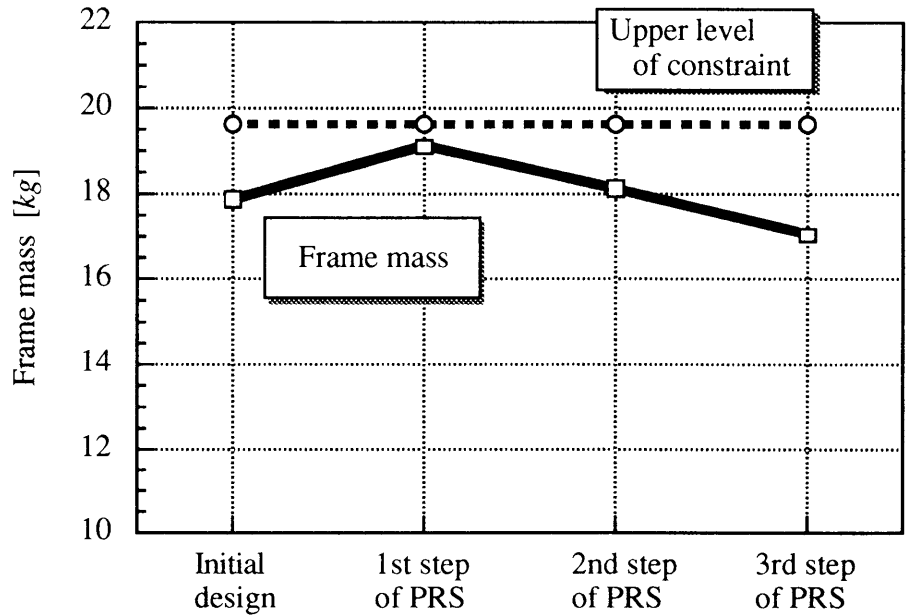


図6-23 PRS 各段階での質量の履歴と制約の上限値

以上のように、PRS では順次実行される各目的関数の最小化の際に導入されるそれ以外の目的関数値の「緩和」によって、それぞれの達成度が規定される。多目的設計問題において、各設計目標の達成度を調節するために、設計者をそれぞれの目的関数の重み付けやトレードオフ比による相対比較から解放する点が、PRS の持つ優越性であることを重ねて主張しておく。

6-5 結 言

本章での議論をまとめると以下ようになる。

- (1) 従来提案されてきた多目的最適化手法の問題点を克服するため、 ϵ -制約式手法に基礎をおき、機械設計における複数の設計目標に対する意思決定上の優先順位に着目して構築した、プライオリティランキング政策を提案した。
- (2) 構造設計における複数の設計目標は、その優先性の特質と度合に着目することにより、要求目標と希求目標に分類されることを示した。そしてこの要求目標と希求目標からなる最適構造設計問題は、プライオリティランキング政策によって解かれることを示した。
- (3) 具体的な機械構造設計の例として三つの設計目標をもつ自動二輪車のフレーム設計をとりあげ、要求目標一つ、希求目標二つからなる三段階の単一目的最適化問題としての定式化と解法を示した。
- (4) 三段階の最適化の実行の結果、自動二輪車のフレーム設計における各目的関数の最適化が、それらの所期の優先性を反映して達成された。このことにより、プライオリティランキング政策の有効性が実証された。

第7章 結 論

本研究においては、部材が曲げを受ける実用フレーム構造物の静的、動的な最適構造設計プログラムシステム OPTSYS を開発し、このシステムによって自動二輪車の車体フレームの部材断面寸法および部材配置を設計変数とした最適設計を行ない、システムの有効性を示した。そこでは、静的問題の目的関数としてフレーム質量とねじり静コンプライアンスが、また動的問題の目的関数としては強制加振力によって引き起こされる車体各部の振動応答加速度レベルの最大成分が採用され、与えられた制約条件を満足しつつ最小化された。それらの結果から、OPTSYS が十分に実用的な有限要素モデルを対象とした最適設計において機能することが検証された。さらに、実際の機械設計において不可欠となる、優先順位のある複数の設計目標を考慮した多目的最適化問題の解法に対して、 ϵ -制約式手法に基礎をおいたプライオリティランキング政策を提示し、それによって理論的に設計者の選好情報が反映された最適解が得られることを示した。この政策を三つの設計目標をもつ二輪車フレームの多目的最適設計問題に適用し、汎用性のある多目的最適化手法としての有効性を実証した。

本研究で得られた結果や知見、および導かれた結論の詳細は各章の結言において述べたとおりであるが、以下にもう一度整理して示す。

第2章においては、開発した最適構造設計プログラムシステム OPTSYS の機能と構成を示し、その解析部が汎用構造解析プログラム SAPIV に感度解析機能を追加したものであること、さらに最適化部が様々な特性をもった最適設計問題に対応できるように乗数法・内接球法・可能方向法の三つの最適化手法を備えていることなどを述べた。

第3章においては、OPTSYS のもつ静的・動的な感度解析機能について述べた。そして、静的感度解析においては静的変位と構造質量について、また動的感度解析においては固有値問題における固有値と固有ベクトル、および周波数応答伝達関数についての感度算出法を述べた。

第4章においては、OPTSYS を用いた実用機械構造物の設計問題として、静的問題における最適構造設計問題を取り上げた。ここでは、自動二輪車の車体フレームの部材断面寸法および部材配置を設計変数として、ねじり静コンプライアンスの制約の下での質量最小化を実行した。その結果、エンジンがフレーム上部部材から吊り下げられる構造が得られ、初期設計に較べて大きく軽量化された。さらに、Kuhn-Tucker 条件より、質

質量最小化設計で得られた最適値における質量の値を制約条件としてねじり静コンプライアンス最小化設計を実行すると、質量最小化設計の解と等しい設計解が得られなければならないことを導いた。そして実際に質量の制約の下でのねじり静コンプライアンス最小化を実行し、質量最小化設計の結果と定量的に比較したところ、上の理論的予測が数値的に実証された。

第5章においては、動的問題における最適構造設計問題を取り上げた。ここでは最初に、二輪車の車体構造が達成しなければならない、非常に多数の加振力成分に対する多数の評価点での同時的な振動低減に関して、ミニマックス法の定式化を用いた最適設計法が有効であることを理論的に示した。そして、実際の二輪車フレーム構造を例にとり、ねじり静コンプライアンスと質量という静的な設計項目を制約条件として、エンジンによる強制加振を受ける場合の振動応答レベルの最大値を最小化する設計を行った。その結果、振動応答レベルの最大値は、複数の応答評価点の間で等しく競合しあうまで低減され、ここでのアプローチの有効性が実証された。さらに、応答評価点の間で重み付けを変更して最適化を再度実行したところ、設計者の意図した振動低減の達成度の調節が可能であることが確認された。

第6章では、一般の機械の設計目標を、その属性に基づいて要求目標と希求目標とに分類し、それらの間に存在する優先順位について考察した。次に、それらの優先順位を反映できる多目的最適化手法として、 ϵ -制約式法に基礎をおいたプライオリティランキング政策を提案した。そして、この方法が、各目的関数の最小化達成度の調節を、従来の多目的最適化手法のように重み付けやトレードオフ比の設定、あるいは設計者の選好を表現する関数の導入という陽な形式で行なうのではなく、各目的関数の最小値からの改悪限度の設定として与えるために、設計者にとってはより容易な意思決定ができることを主張した。さらに、このプライオリティランキング政策を用いて、二輪車フレームのねじり静コンプライアンスの減少、質量の軽減および振動応答レベルの低減という三つの設計目標を考慮した多目的最適設計問題の解を求めることにより、各目的関数の最小化の調節が設計者の意図を反映しつつ可能となることを示した。

以上、骨組構造の最適設計法とその二輪車体設計への応用に関する研究を行ない、静的問題に対する部材配置の設計、動的問題に対する多目的最適設計など、本論文で提示したアプローチが実際の設計において有効であることを示した。本研究は、自動二輪車の車体設計を支援することを常に念頭におきつつ、さらに一般的な機械設計をも視野に

収めようと試みたものである。今後、ここで提案されたいくつかのアプローチが、車体設計のみならず、構造を対象とする工学の他分野においても試行・利用され、それぞれの分野で設計の自動化の前進に少しでも寄与することを期待したい。

文献

- (1) 広瀬健郎, “二輪車の CAE”, スズキ技法, 18, p.52 (1992).
- (2) Schmit, L.A., “Structural Design by Systematic Synthesis”, *Proc. of ASCE 2nd Conf. on Electronic Computation*, p.105 (1960).
- (3) 吉川弘之, 富山哲男 (編著), インテリジェント CAD, 浅倉書店 (1989).
- (4) Barnett, R., “Survey of Optimum Structural Design”, *Experimantal Mechanics*, 6, No.12 (1965).
- (5) Schmit, L.A., “Structural Engineering Application of Mathematical Programming Techniques”, *Symp. on Structural Optimization, AGARD Conf. Proc.* No.36, NATO (1970).
- (6) Schmit, L.A. and H.Miura, “A New Structural Analysis/Synthesis Capability - ACCESS 1”, *AIAA J.*, 14, p.661 (1976).
- (7) Adelberg, M.L., Devries, R.I., Moshvidis, Z.A. and L.Razgunas, “OPUS : A Programming System Approach to Structural Optimization”, *SAE Paper.*, 811316, p.151 (1981).
- (8) Lust, R.V. and J.A.Bennett, “Structural Optimization in the Design Environment”, *SAE Paper.*, 811318, p.169 (1981).
- (9) Vanderplaats, G.N., “CONMIN - A Fortran Program for Constrained Function Minimization”, *NASA. TM-X-62.282*. (1973).
- (10) Vanderplaats, G.N., H. Sugimoto and C.M. Sprague, “ADS-1: A New General-Purpose Optimization Program”, *AIAA/ASME/ASCE/AHS 24th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, p.117 (1983).
- (11) 例えば、日本機械学会 (編), “設計システムにおける多目的最適化と満足化”, 日本機械学会第 1 回デザインエンジニアリングプラザセミナー教材, p.264 (1991).
- (12) Farkas, J., *Optimum Design of Metal Structures*, Ellis Horwood Limited (1984).
- (13) 林洋, “自動車技術の国際比較”, 日本機械学会誌, 88-797, p.445 (1985).
- (14) 尾田十八, 山崎光悦, “有限要素法による多連結物体の最適形状創生法”, 日本機械学会論文集, 45-389, p.33 (1979).
- (15) Bendsoe, M.P. and N. Kikuchi, “Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method”, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 71, p.197 (1988).
- (16) 大河内禎一, 伊藤志成, 相原章, “機械構造の軽量化計画 (多連結体創成による構造軽量化)”, 日本機械学会論文集, 56-525, p.284 (1990).
- (17) 吉村允孝, “機械構造物の振動特性に関する最適設計の研究 (工作機械構造物のびびり振動に関する最適化設計)”, 日本機械学会論文集 (第 1 部) 42-363, p.3428 (1976).
- (18) 山川宏, 房前芳一, 斉藤裕一, “振動を考慮した構造物の最適設計について (第 5 報, 複数個の固有振動数を制約した場合の最小重量設計)”, 日本機械学会論文集 (第 1 部) 44-387, p.3759 (1978).
- (19) Mann, R.W., “The CAD Project”, *Mechanical Engineering*, 41 (1965).
- (20) 市川惇信 編, 多目的決定の理論と方法, 計測自動制御学会 (1980).
- (21) 瀬口靖幸, 多田幸生, “逆変分原理による構造物の形状決定問題 (有限要素法による取扱い)”, 日本機械学会論文集 (第 1 部) 44-381, p.1469 (1978).
- (22) Bathe, K.J., E.L.Wilson, F.E.Peterson, “SAP IV A Structural Analysis Program for Static and Dynamic Response of Linear Systems”, *Earthquake Engineering Research Center, EERC 73-11 Rep.*, University of California (1973).
- (23) Fiacco, A.V., and G.P.McCormick, *Nonlinear Programming : Sequential Unconstrained Minimization Technuques*, John Wiley & Sons (1968).
- (24) Hestenes, M.R., “Multiplier and Gradient Methods”, *J. Optimization Theory & Appl.*, 4, p.303 (1969).
- (25) Powell, M.J.D., in *Optimization*, R.Fletcher(ed.), Academic Press (1969).
- (26) 今野浩, 山下浩, 非線形計画法, 日科技連出版社 (1978).
- (27) Nelder, J.A., and R.Mead, “A Simplex Method for Function Minimization”, *Computer J.*, 7, p.308 (1965).
- (28) Box, M.J., “A New Method of Constrained Optimization and Comparison with other Methods”, *Computer J.*, 7, p.461 (1965).
- (29) Vanderplaats, G.N., *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design with Application*, McGraw-Hill (1984).
- (30) Davidon, W.C., “Variable Metric Method for Minimization”, *Argone National Laboratory, ANL-5990 Rev.*, University of Chicago (1959).

- (31) Broyden, C.G., “The Convergence of a Class of Double Rank Minimization Algorithms, parts I and II” , *J. Inst. Math. Appl.*, 6, p.76,222 (1970).
- (32) Fletcher, R., “A New Approach to Variable Metric Algorithms” , *Computer J.*, 13, p.317 (1970).
- (33) GoldFarb, D., “A Family of Variable Metric Methods Derived by Variational Means” , *Math. Comput.*, 24, p.23 (1970).
- (34) Shanno, D.F., “Conditioning of Quasi-Newton Methods for Function Minimization” , *Math. Comput.*, 24, p.647 (1970).
- (35) Baldur, R., “Structural Optimization by Inscribed Hyperspheres” , *J. Engine. Mech.*, ASCE, 98, p.503 (1972).
- (36) Zoutendijk, G., *Methods of Feasible Directions*, Elsevier (1960).
- (37) Dantzig, G.B., *Programming in a Linear Structure*, Comptroller, USAF (1948).
- (38) Karmarkar, N., “A New Polynomial-time Algorithm for Linear Programming” , *Proceedings of 16th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing* (1984).
- (39) Fox, R.L., “Constraint Surface Normals for Structural SynthesisTechniques” , *AIAA J.*, 3, p.1517 (1968).
- (40) Arora, J.S., and E.J. Haug, “Methods of Design Senditivity Analysis in Structural Optimizations” , *AIAA J.*, 17, p.970 (1979).
- (41) Chon, C.T. “Design Sensitivity Analysis Strain Energy via Distribution” , *AIAA J.*, 22, p.559 (1984).
- (42) Fox, R.L., and M.P. Kapoor, “Rates of Change of Eigenvalues and Eigenvectors” , *AIAA J.*, 6, p.2426 (1968).
- (43) 井上喜雄, 藤川猛, 今西悦二郎, 阿部享, “減衰振動系における感度解析と設計変更後の動特性予測” , 日本機械学会論文集(C編), 50, p.597 (1984).
- (44) 長松昭男, モード解析, 培風館 (1985).
- (45) Bathe, K.J., E.L.Wilson, *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, 菊地文雄 (訳) , 有限要素法の数値計算, 科学技術出版 (1980).
- (46) 吉村允孝, “機械構造物の振動特性に関する最適設計の研究” , 日本機械学会論文集, 42, p.3428 (1976).
- (47) 関根泰次, 数理計画法, 岩波書店 (1976).

- (48) Cohon, J.L., *Multiobjective Programming and Planning*, Academic Press (1978).
- (49) 志水清孝, 多目的と競争の理論, 共立出版 (1982).
- (50) 坂和正敏, 非線形システムの最適化, 森北出版 (1986).
- (51) 吉原篤, “二輪車振動解析のための FEM モデルの高精度化” , 自動車技術会学術講演会前刷集, 921, p.101 (1992).
- (52) 森下隆義, “二輪車における体感振動の定量的評価について” , 自動車技術会学術講演会前刷集, , p.193 (1990).
- (53) 谷口修 編, 振動工学ハンドブック, 養賢堂 (1975).
- (54) Bartel, D.L., and R.W. Marks, “The Optimum Design of Mechanical Systems with Competing Design Objectives” , *Trans. ASME* , Ser.B,96-1, p.171 (1974).
- (55) Osyczka, A., “An Approach to Multicriterion Optimization Problems for Engineering Design” , *Com. Meths. Appl. Mech. Eng.* , 15, p.309 (1978).
- (56) Carmichael, D.G., “Computation of Pareto Optima in Structural Design” , *Int. J. Num. Meths. Eng.* , 15, p.925 (1980).
- (57) 藤本英雄, 藤井省三, 牧野洋一, “多目的満足設計と満足化計算法” , 日本機械学会論文集, 51-470, p.2627 (1985).
- (58) 須永照雄, 近藤英二, 高橋幸一, 于曉波, “多目的ミニマックス法と最適設計への応用” , 日本機械学会論文集, 55-509, p.206 (1989).
- (59) 吉村允孝, 濱田年男, 由良憲二, 人見勝人, “機械構造システムの多目的最適設計” , 日本機械学会論文集, 49-445, p.1606 (1983).
- (60) 吉村允孝, “機械製品に対する製品設計と工程設計の統合的最適化に関する研究” , 日本機械学会論文集, 54-505, p.2313 (1988).
- (61) Charnes, A. and W.W. Cooper, *Management Models and Industrial Applications of Linear Programming*, John-Wiley & Sons (1961).
- (62) Ignizio, J.P., *Goal Programming and Extensions*, D.C.Health and Company (1976).
- (63) Haimes, Y.Y. and W.A. Hall, “Multiobjectives in Water resources systems analysis : the surrogate worth trade-off method” , *Water Resources Res.*, 10, p.614 (1974).

謝 辞

本研究を遂行するにあたり、金沢大学工学部機械システム工学科 尾田十八教授、山崎光悦助教授に深甚なるご指導とご配慮をいただいたことに対し、心よりの感謝を申し上げます。また、同学科 佐藤秀紀教授、放生明曠教授、および土木建設工学科 梶川康男教授には、本研究に関して率直なるご意見とご助言をいただきました。心よりお礼を申し上げます。

また、特に動的問題の取り扱いと多目的最適設計の重要性に関して多大のご教示をいただいた、京都大学工学部精密工学科 吉村允孝講師に心よりの感謝を捧げます。

さらに、本研究を業務として認め、我慢強く支援していただいたスズキ株式会社電算機部部長 阿部淳平氏に感謝いたします。

また、本研究を遂行するにあたり、実設計の観点から様々の助言をいただきましたスズキ株式会社二輪設計部の諸氏に感謝いたします。同設計部の広瀬健郎課長、加藤悦嗣主任には、本論文作成にあたって OA 機材を使用させていただきました。

本研究の動的最適設計の部分で用いた二輪車フレームの高精度有限要素モデルの作成は、同社実験解析部主任 吉原篤氏によるものです。同社横浜研究所の柏倉健、実験解析部の黒田篤行の両氏には、最適化計算のために必要な大型計算機の計算時間やメモリの配分の面で様々な便宜を図っていただきました。また、参考文献の調査・検索にあたっては、同社技術管理部の杉田眞代氏に多くのご助力をいただきました。これらの方々にも深くお礼を申し上げます。

最後に、時に挫折しそうになる著者をたえず励まし、慣れぬ手でマウスを操作して本論文中の多くの図表作成に協力してくれた妻 栄子に感謝すると共に、以上の皆様のこれからのご活躍を心よりお祈り申し上げ、謝辞に替えさせていただきます。

